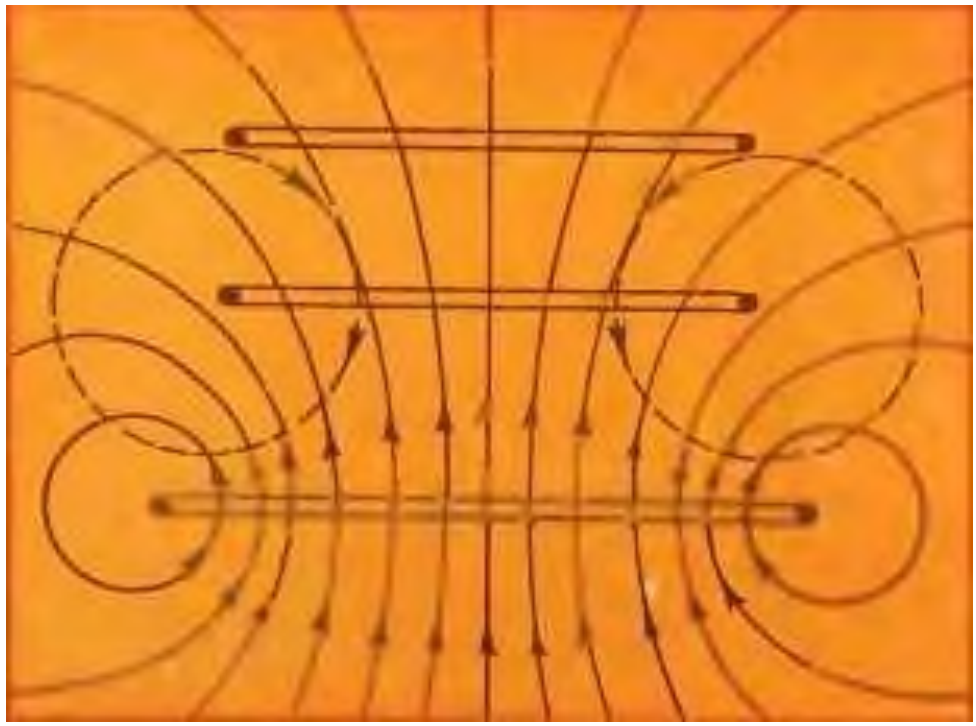
В. В. КОЗОРЕЗ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ МАГНИТНО ВЗАИМО-ДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНЫХ ТЕЛ



5Я31
KS3

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

В. В. КОЗОРЕЗ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ МАГНИТНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНЫХ ТЕЛ

!>№мг *га*

Горьковского
Инв. № Т 69545

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1981

УДК 531.37; 538.31

Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел / Козорез В. В.— Киев Наук, думка, 11981.— 140 с.

В монографии систематизированы новые результ ченные автором в области динамических систем мат ---------- тации. Обоснованы эффект минимума энергии взаимодействия пары магнит — идеально проводящий токовый контур («магнитная потенциальная яма») и устойчивость планетарной конфигурации постоянных магнитов. Нетрадиционно сочетание методов космической механики и электродинамики В задаче и свободных магнитных тел (л > 2) осуществлено сокращение числа переменных. Изучена устойчивость равновесия И колебаний *в* магнитной яме. Исследована устойчивость планетарной системы с различными моделями магнитов (длинны цилнидры, токовые кольца и др.). Описаны опыты, подтверждающие обнаруженные эффекты.

Книга рассчитана на специалистов по механике и электродинамике, а также иа инженеров, занимающихся вопросами магнит- н > подвески.

Ил. 41. Табл. 2. Библиогр.: с. 138—141 (94 назв.).

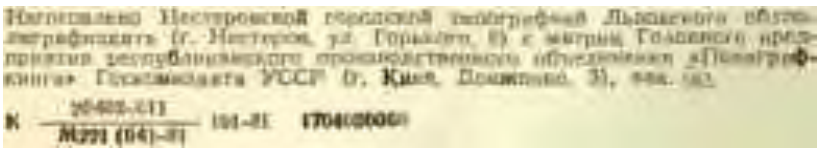
Ответственный редактор *В. М. Глушков*

Рецензенты *А. Ю. Ишлинский, В. И. Скурихин*

Редакция физико-математической литературы

Василий Васильевич Козорез

Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел



© Издательство «Наукова думка», 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

Освоение обозначения . . . • 5

Предисловие 7

Часть I. АНАЛИЗ ИЗВЕСТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБ УСТОЙЧИВЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМАХ

Глава 1. Равновесие .... • • . - .

§1.1 . Теорема Ирншоу .... „ . . 11
§ 1.2. Эффект диамагнитного отталкивания 11
§ 1.3. Результаты Миткевича и современных авторов 13
13

Глава 2. Планетарная конфигурация

§ 2.1. «Проблема 1/R³» ....
§ 2.2. Учет пространственной протяженности магнитной частицы . . . § 2.3. Другие варианты решений «проблемы *1/R*** 15 19 21
§ 2.4. Особенности новой постановки задаан 22

Часть И. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕСНОЙ СИСТЕМЫ МАГНИТНЫХ ТЕЛ

Глава 3. Длинные цилиндрические магниты ■ .....

1 **3.1. Эквивалентность «гантели» пеню длинного цилиндра** 27 27 28
3.2. Потенциальная энергия двух магнитов 30 32
3.3. Произвольное число свободных магнитов 35
3.4. Несовпадение магнитной и массовой симметрий тела 35

Глава 4. Магнитная потенциальная яма 37

§ 4.1. Идеально проводящий контур с током как модель магиитв . . . , § 4.2. Минимум магнитной потенциальной эмргнн 40 42 47
§ 4.3. Доказателвство, использующее теорию [81] 51
§ 4 .4. Частный пример соосиых колец .... , . . .
§ 4.5. Некоторые о&ющетя .....

Глава 5. Свободные идеально проводящие токовые кольца 51

§ 5.1. Энергия л свободных коед 55
§ 5.2. Взаимная индуктивность н энергия вблизи положения соосности двух колец 57

ОГЛАВЛЕНИЕ

....
§ 5.3. Силы в моменты сил двух систем кольцевых токов .... . * • •

51

Глава в. Магниты, ограниченные поверхностью сферы и эллипсоида вращения 60

§ 6.1. Постановка задачи .....
§ 6.2. Поле магнита сфероидальной формы 63
§ 6.3. Энергия системы сфероид — диполь 67
§ 6.4. Поле двух шаровых магнии» .....
§ 6.5. Шар внутри намагниченной сферической оболочки 78
§ 6.6. Формулы магнитной змргии ..... ■ 79

Часть III. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Глава 7. Прииедеинн 81

§ 7.1. О зависимости магнитной потенциальной анергии от угловых координат 81
§ 7.2. Приведение в задаче двух магнитов 83
§ 7.3. Обобщение на случай лтел 88
§ 7.4. Приведение системы бе циклических координат . . 91
Глава 8. Устойчивость равновесия и колебаний свободного тела в магнитной тенциальной яме 93

§ 8.1. Равновесие-соосиых- коо«1..... . . 93
§ 8.2. Достаточные условия устойчивости равиовгеия 94
§ 8.3. Об устойчивости равновесия других магнитных стктп 96
§ 8.4 . Об устойчивости колебаний 99
§ 8 .5. Некоторые количественные расчеты 104
Г л а'в а 9. Устойчивость планетарной системы с магнитными момента ми, перпендикулярными плоскости црбга| 109
£ 9.1. Два цилиндрических магнита 109
» 9.2. бытянутый сфероид — диполь 111
» 9.3. Магнитные системы других типпв 113

Глав Ю, Планетарные системы с магнитными моментами, лежащими в плоскости орбиты 113
§ 10.1. Два цилиндрических маггнта 113
§ 10. 2. Два янободных токовых ксоьца..... 114
§ 10.3. Устойчивость других магнитных систем 119
§ 10.4. Об устойчивых планетарных магнитных конфигурациях 120
Глава 11 Эксп^имитгльнор обоснование устойчивых магнитных си стем 124

§ 11.1. Опыт орбитального полета свободного магнита 124
§ 11.2 . -Анализ опыта орбитального псолта.....126
§ 11.3. Опыт по проверке условий существования магнитной ямы 133
§ 11.4 . Опыт -устойчивого равновесия 135

Список литерртуры 138

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A **— центральный массовый момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной оси его магнитной симметрии**

A **— векторный потенциал магнитного поли**

a **— радиус кольцевого тока, цилиндрического магнита, шара; линейный параметр бисфернческих и эллипсомдыьныГ координат *B* — магнитная индукция**

C — центральный массовый момент инерции тела относительно оси магнитной симметрии, жесткость (производная силы по смеще-

c **— скорость света**

D **— электрическая индукция**

d **— диаметр провода контура с током**

dS. dV **— *элементы* площади и объема**

E **— напряженность электрического поля *E* — иитефал полной энергии**

E (й) **— полный эллиптический интеграл второго рода модуля &**

F **(а, Р, у, г) — гипергеометрический ряд**

f **— скалярный магнитный потенциал**

»*— единичный вектор

J **— намагниченность**

7.— плотность тока

C — вес

H **— напряженность магнитного поля**

h, £ — расстояние между плоскостями соосных колец

ft — постоянная Планка

K (й) **— полный эллиптический интеграл первого рода модуля *й K* — механический момент**

й, й **— соответственно модуль и дополнительный модуль полных эллиптических интегралов *(й = У Г — й*)***

Ъпт< Ет **— коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура *т***

l-m — коэффициент взаимной индукции (взаимная индуктивность) контуров *mun*

L — функция Лагранжа

I — характерный размер магнита

M — интеграл момента импульса орбитального движения, масса нуклона

Mf — интеграл момента импульса собственного вращения <-го тела *p* — дипольный магнитный момент

m — масса

n — число тел

Pn (г) — полином Лежандра первого рода порядка *n* аргумента г

P — магнитная сила, электрическая поляризация

p, т) — отношение потокосцеплennй идеальных токовых контуров *Q, x* — механические координаты (степени свободы)

q, *x* — механические скорости

R — расстояние до центра притяжения

р • I — цилиндрические координаты

T—кинетическая энергия

t — время

U — потенциальная энергия магнитного взаимодействия

V — потокосцепление контура

V — функция Ляпунова

W — энергия магнитного поля

Е П. ф — бнсферическне координаты

y — отношение взаимной индуктивности к собственной

— декартовы координаты точки

о, *x,* ф — координаты вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения О. Ф. Ф — углы Эйлера (Ф — угол нутации, образующийся между осями магнитной симметрии двух свободных тел; ф — угол прецессии, обозначающий поворот вокруг условно вертикальной оси; Ф — угол чистого или собственного вращения)

a, Р, *y* — углы Эйлера — Крылова (а — угол поворота вокруг оси *x,* Р — нокруг осн *y,* *y* — вокруг оси г)

е — диэлектрическая, проницаемость

Рз — магнитная постоянней

р — приведенная масса, магнитная проницаемость

X — лондоновская глубина проникновения

y — величина магнитного заряда

0£гС — трехгранник инерциальной системы отсчета

О/БмЧо&о — трехгранник с началом в центре масс свободного *i-mo* тела н осями, параллельными соответствующим осям трехгранника 0£т£

— трехгранник, жестко связанный со свободным телом так, что точка *Ot* совпадает с центром масс *i-го* тела, а 0& — магнитная ось тела

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интерес к парению тела в свободном состоянии при помощи маг нитных сил возник уже в глубокой древности. Пятьсот лет известна легенда, согласно которой саркофаг Магомета, притягиваясь к магнитному своду, висит в воздухе и не касается каких-либо предметов. В более позднюю эпоху (I—II в. н. э.) с помощью магнитов пытались заставить висеть в воздухе статуи храмов.

В настоящее время интерес *к* левитации не только не ослаб, но даже усилился. Это связано с техническим значением магнитной левитации в современной технологии (физический эксперимент с пробным телом (8], приборостроение [52, 56), транспорт [261, энергетика и др.). Например, магнитная подвеска вагона позволит преодолеть существующий *дли* колесного транспорта барьер по скорости, значительно уменьшит шум и повысит экономичность наземного транспорта.

Преимущества систем магнитной левитации по сравнению с традиционными техническими решениями дают основание рассчн гывать на важные последствия. Поэтому у нас в стране и за рубежом в исследованиях по магнитной левитации задействован большой научно-технический потенциал. За последние пять — десять лет значительно возросло число публикаций и выданных патентов по данной теме. Созданы и внедрены отдельные приборы, изготовлены и испытаны образцы транспортных устройств с магнитной опорой. Этим успехам значительной мере способствовал прогресс, достигнутый в механике, электродинамике, технической кибернетике, прикладной сверхпроводимости и других областях.

Однако в этой области еще имеются нерешенные проблемы принципиального характера. Такой проблемой, тесно связанной с механикой и электродинамикой, является проблема устойчивости (стабильности) магнитной системы. Она рассматривалась еще Гильбертом (1600) и Ирншоу (1842). Ими был установлен

факт неустойчивости равновесия (статической магнитной конфигурации).

Вывод о нестабильности равновесия уточнил Браунбек 169| (1940). Он показал, что равновесие может быть устойчивым при наличии в системе диамагнитного тела. Однако в связи со слабым проявлением диамагнетизма у обычных веществ (за исключением сверхпроводников) результаты Брауибека ие получили широкого практического применения.

Существенное продвижение в проблеме устойчивости статической магнитной системы было достигнуто благодаря проникновению в область магнитной левитации идей кибернетики. Стабильность ранее неустойчивой системы оказалась возможной благодаря управлению магнитными силами. Именно управляемая магнитная подвеска получила в настоящее время широкое развитие. Кроме того, открытие идеального диамагнетизма вещества в сверхпроводящем состоянии (эффект Мейсснера — Оксеифельда, 1933), а также опыты Аркадьева (Институт физических проблем, 1945) способствовали развитию сверхпроводящих систем неуправляемой магнитной левитации.

К проблеме устойчивости магнитной системы относятся результаты по изучению поведения частиц, обладающих «истинным* магнитным моментом |75|. Эти результаты в свое время играли важную роль в теории мезона и ядерных сил (Тамм, I940). Они состоят в том, что свободная магнитная частица не остается иа стаци- онариой траектории, а падает на магнитно притягивающий центр («проблема I *IRh).* Важную роль в понимании особенностей поведения магнитной системы играет также эффект стабилизации знакопеременной силой |92|. Он используется не только в магнитной, но и в системах другой природы (стабилизация перевернутого маятника с колеблющейся точкой опоры, жесткаи фокусировка частиц в ускорителях и др.).

За последние десять лет в Институте кибернетики АН УССР были проведены поисковые исследования с целью обнаружения новых неизвестных ранее механизмом стабилизации динамической системы свободных магнитных тел. Результаты этих исследований изложены в данной монографии.

В первой части анализируются известные результаты об устойчивости. Описаны опыт Аркадьева с магнитом, парящим над сверхпроводящей поверхностью, трактовка этого опыта различными авторами (Буккель, Креснн, Фейнман и др.). Анализируются работы Гильберта, Ирншоу, Брауибека, Миткевича, Торнтона и других исследователей. Устанавливается недостаточная изученность магнитного взаимодействия токов в замкнутых контурах без электрического сопротивления. Дан обзор «проблемы *1/RH* (работы Тамма, Гинзбурга, Бете и др.) и показана целесообразность изучения «тесной» динамической системы магнитных объектов, в которой размер траектории сравним с размером объекта. Основной результат первой части состоит в обосновании но-

вой постановки задачи исследования Ее особенности сводятся к двум моментам. Во-первых, рассматривается полная система уравнений движения свободных магнитных тел, учитывающая и Полупя-гельное движение центров масс, н вращение вокруг центров масс. Две хорошо известные аадачи — задача и тел и задача тела с неподвижной точкой — как бы свизываются в од при помощи магнитных сил, зависящих от поступательных и вращательных координат. Во-втОрых, рассматривается не общий случай магнитных тел, а конкретные модели магнитного взаимодействия, для которых можно аналитически найти потенциальную энергию магнитного взаимодействия как функцию координат.

Определению магнитной потенциальной энергии U в указанном смысле посвящена вторая часть работы. Здесь рассмотрены такие модели свободных магнитов: длинные цилиндры, вытянутый эллипсоид — диполь, сплюснутый эллипсоид — диполь, идеально проводящие токовые кольца, два магнита шаровой формы, шаровой магнит внутри магнита со сферической полостью. Получены формулы U в зависимости от степеней свободы, в качестве которых выбраны цилиндрические координаты центров масс тел и углы Эйлера. Для магнитов, ограниченных сферическими лс- верхностями, энергия U найдена ие в общем случае ориентации, а для магнитных моментов, параллельных и перпендикулярных плоскости орбиты. Подробно изучен одномерный случай маг нитного взаимодействия токов замкнутых идеально проводящих контуров. Обнаружен новый эффект — минимум энергии U как функции расстояния между двумя контурами (магнитная потенциальная яма).

Установлен вид потенциальной энергии для произвольной системы свободных тел, описываемых цилиндрическими координатами н углами Эйлера. Этот вид используется в третьей част» для приведения — сокращения числа переменных на основе интегралов движения. Для наглядности приведение осуществлено сна* чала для двух тел, затем для произвольного их числа. Получены уравнения движения приведенной системы в форме, разрешенной относительно старшей производной. Приведение осуществлено в системе центра инерции совокупности тел при наличии циклических координат и в том случае, цогда циклические координаты отсутствуют.

В третьей части в постановке • дачн об устойчивости по отношению к части переменных подобно изучается устойчивость равновесия приведенной системы. Ему отвечают два типа стационарных конфигураций исходной системы — равновесие и относительное орбитальное движение. Детально изучена устойчивость равновесия одного и двух свободных идевльио проводящих колец в магнитном поле неподвижного кольца и поле постоянной силы тяжести, направленной по оси неподвижного кольца. Получена область устойчивости и выяснено влияние различных параметров

(геометрии магнитной системы, маятниковое™ и др.). Исследована задача двух свободных тел с прямолинейной траекторией центров масс.

Изучено влияние типа магнитных систем на устойчивость планетарной конфигурации с использованием найденных во второй части формул магнитной энергии и достаточных условий устойчивости планетарной системы. Показано, что в случае перпендикулярное™ магнитных моментов плоское™ орбитального движения устойчивость траектории может иметь место для магнитов вытянутой формы. В случае размещения магнитных моментов в плоскости орбиты, наоборот, устойчивость может быть достигнута сплюснутыми магнитами. Установлено, что в устойчивой планетарной магнитной системе траектория не может намного превышать размеры магнитного тела.

В экспериментальной час™ описынаются н анализируются опыт орбитального движения свободного постоянного магнита, экспериментальная проверка влияния типи магнитной системы на устойчивость, опыт по пронерке условий существования магнитной потенциальной ямы н опыты устойчивого равновесия свободного тела в магнитной потенциальной яме.

Автор выражает глубокую благодарность академикам В. М. Глушкову н А. Ю. Ишлинскому за многочисленные ценные советы и идеи, высказанные в процессе обсуждения неясных вопросов, и также за большую помощь в организации исследований, результаты которых нашли отражение в этой книге.

Часть

Анализ известных представлений об устойчивых магнитных системах

Как уже отмечалось, представление об устойчивой системе свободных магнитно взаимодействующих тел сводится к следующему: неустойчивость равновесия (теорема Ирншоу), неустойчивость планетарной системы («проблема I//?[8]»), эффект стабилизации знакопеременной силой.

В данной работе получены новые результаты об устойчивости равновесия и планетарной системы. Поэтому ниже будет дан подробный анализ лишь первых двух фактов, причем обсуждается их физическая сторона. Теория и области применения эффекта стабилизации знакопеременной силой представлены в работах 171. 92].

едвноввсп

§ 1. 1. Теорема Ирншоу

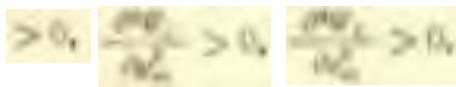
В 1842 г. Ирншоу пришел к выводу, что, если частицы эфира притягиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, равновесие неустойчиво и, следовательно, эфир как статическая конфигурация невозможен. Следует отметить, что правильный анализ устойчивости дал намного раньше Гильберт. Он писал [12, с. 135]: «ФракасториЙ... говорит, что кусочек железа повисает в воздухе, так что не может двинуться ни вверх, ни вниз в том случае, когда наверху будет помещен магнит, который в состоянии... тянуть железо вверх настолько же, насколько последнее наклоняет его вниз: железо как бы укрепляется в воздухе. Это нелепо, так как более близкая магнитная сила является всегда более мощной». В этом выводе, сделанном за 90 лет до появления «Начал» Ньютона, содержится существенный элемент современного доказательства

устойчивости — знак приращения силы при отклонении от поло жения равновесия

Тем не менее неустойчивость равновесия связывают обычно о именем Ирншоу [29, 73, 74 , 76] Особенно прозрачным является доказательство этой теоремы для системы точечных электрических зарядов [76]. Энергия электростатического взаимодействия зарядов

И,- **<1J)**

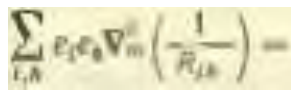
является функцией координат x_m, y_m, z_m **зарядов** e_m. **Для минимума** W **необходимо и достаточно, чтобы первые производные** W_t **по всем координатам всех зарядов обращались в нуль и чтобы для любого** m, **по крайней мере, выполнялись неравенства**



(1.2)

Но

д? дУп



(1.3)

в силу того, что MR **— решение уравнения Лапласа. Поэтому достаточное условие минимума** W_e **не выполняется.**

Аналогичный вывод может быть получен для электрически или магнитно заряженных тел. Вопрос об устойчивости равновесия в этом случае подробно рассмотрен Браунбеком [89]. Им доказано, что равновесие не может быть устойчивым, если относительная диэлектрическая или магнитная проницаемости больше единицы. Так как относительная диэлектрическая проницаемость всегда больше единицы, устойчивое равновесие в электростатическом поле невозможно. Относительная магнитная проницаемость диамагнитных материалов меньше единицы. Идеальными диамагнетиками являются сверхпроводники. Поэтому при наличии диамагнетиков устойчивость равновесия в системе магнитно взаимодействующих свободных тел возможна.

Как и в рассмотренном примере точечных зарядов, выводы Браун- бека основаны на том, что энергия постоянного во времени электрического или магнитного поля не может достигать минимума.

В литературных источниках теорема Ирншоу формулируется по-разному. Смайт это делает так [73, с. 25]: «заряд в электрическом поле не может удерживаться в равновесии одними электрическими силами». Тамм заключает, что «устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов невозможна» [76, с. 97]. У Стрэттона рассмотрен вариант свободного заряженного проводника и устанавливается, что «заряженные тела, находящиеся в электростатическом поле, не могут удерживаться в состоянии устойчивого равновесия под действием одних только электрических сил» [74, с. ПО].

§ 1. 2. Эффект диамагнитного отталкивания

Браунбек не только создал теорию, но и экспериментально подтвердил устойчивость равновесия диамагнетика в магнитостатическом поле (90]: Ему удалось осуществить подвес 8 мг висмута и 75 мг графита в постоянном поле напряженностью 23 000 Э.

Новую постановку опыта дал Аркадьев [21. Идея заключалась в том, чтобы усилить эффект диамагнитного отталкивания 12, с. 301]: «применяя сильно диамагнитные тела, каковыми являются сверхпроводники, можно при небольшом магнитном поле иметь подвес с большой подъемной силой. Обертывая задачу, можно заставить над сверхпроводником парить магнит». Опыты, поставленные по его просьбе в Институте физических проблем АН СССР в 1945 г., показали следующее [2, с. 304]: «Намагниченный нифе- ралевый брусок квадратного сечения 4х4 мм[8] и длиной 1 см был брошен на вогнутый свинцовый диск диаметром около 4 см, находившийся на дне сосуда Дьюара с жидким гелием. Совершив несколько упругих прыжков по вертикали, магнит после ряда сложных быстрых колебательных движений установился в горизонтальном положении над свинцом на высоте многих миллиметров».

Результат идеи применить в качестве диамагнитного тела сверхпроводник оказался блестящим — уменьшив на два порядка уровень магнитного поля, удалось во столько же раз увеличить вес парящего тела.

Опыт Аркадьева упоминается различными авторами, с одной стороны, как демонстрация идеального диамагнетизма сверхпроводника (9, с. 24; 40, с. 11; 62, с. 114; 84, с. 41], а с другой — как принцип действия сверхпроводящей магнитной опоры (40, с. 66; 10, 521.

Однако в смысле характера зависимости магнитной силы от расстояния опыт Аркадьева не внес каких-либо новых существенных особенностей. Приведенные в [2] формулы силы, зависящей обратно пропорционально четвертой степени расстояния,— хорошо известный закон взаимодействия магнитных диполей

§ 1. 3. Результаты Миткевича и современных авторов

Первая постановка вопроса о взаимодействии двух сверхпроводящих контуров с током принадлежит, по-видимому, В. Ф. Миткевичу В работе [57] 'он учитывает особенность контура без электрического сопротивления [57, с. 298]: «Магнитные потоки, сцепляющиеся с каждым из контуров, остаются постоянными, каким бы изменениям система не подвергалась в отношении формы и расположения». [1]

[1] На работу [571 автору указали Г. Е. Пухов и О. В. Тозонн.

Однако рассмотренный Миткевичем частный случай не привел к каким-либо необычным свойствам силы 157, с. 298]: . в описанном случае предельного сближения двух контуров их общая электро- кинетическая энергия уменьшилась вдвое За счет именно этого запаса энергии в системе и была совершена электромагнитной силой механическая работа сближения контуров».

Таким образом, возможность взаимодействия с минимумом магнитной энергии Миткевичем не обнаружена. Это произошло потому, что рассмотренный в [57] частный случай одинаковых замороженных потоков исключает существование магнитной потенциальной ямы (см. §4.2).

Ряд работ о магнитном взаимодействии двух сверхпроводящих контуров посвящен проблеме стабилизации равновесия за счет проявления замсроженности магнитного потока идеально проводящего витка [26, 64, 80] В работе [80] в качестве исходного условия устойчивости магнитной опоры используется неравенство

$$-Д- \qquad V - P > 0. \qquad (1.4)$$

Вообще говоря, этого условия недостаточно (должна быть положительной не только сумма, но и каждое слагаемое в левой части (1.4)). Исходя из условия (1.4), делается вывод об устойчивости опоры для случая сверхпроводящего контура с нулевым замороженным потоком. Аналогичный пример и вывод об устойчивости содержатся в работе [64].

Противоположная точка зрения изложена в обзорной статье [26], где показано, что два магнитно отталкивающихся контура нестабильны в боковом направлении

Анализ работ [64, 80] показывает, что в них отсутствует строгая постановка задачи об устойчивости. Имея динамическую систему со свободным телом, обладающим шестью степенями свободы, вывод об] устойчивости делается на основании положительной жесткости по одной координате. Для анализа устойчивости равновесия авторы работ [64, 80] игнорируют тот факт, что теорема о минимуме энергии (теорема Лежен — Дирихле, см., например, [1, с. 289]) подразумевает потенциальную, а не какую-либо иную энергию Чтобы магнитная энергия была потенциальной, ее необходимо выразить через магнитные потоки и механические координаты 181]. Однако в упомянутых работах магнитная энергия требуемым образом не выражена. Существенно подчеркнуть, что в работах [26, 64, 80] рассмотрен сверхпроводящий контур с нулевым замороженным потоком. Как будет показано ниже (§4.2), этот случай также исключает минимум магнитной энергии

В работе 1911* указаны два частных случая взаимодействия цилиндрического магнита и соосного ему сверхпроводящего витка — отталкивание с нулевым замороженным потоком витка и при-

* На эту работу автору указал Л. А. Левин.

тяжение с замораживанием потока витка на нулевом зазоре (т. е размещением магнита внутри кольца до его охлаждения). В обоих случаях возникают особенности магнитной силы, обязанные эффекту сохранения полного магнитного потока идеально проводящего витка. Вместо монотонных кривых *1, 2* на рис. 1, описывающих взаимодействие магнитно притягивающихся и магнитно отталкивающихся тел, зависимость магнитной силы P от расстояния R качественно имеет вид, показанный кривыми *3, 4* на рис. 1. Из графиков

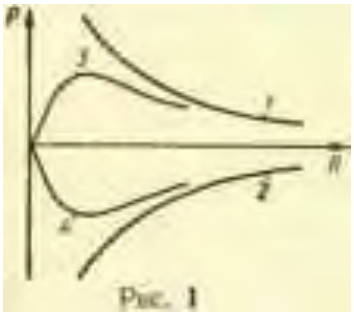


Рис. 1

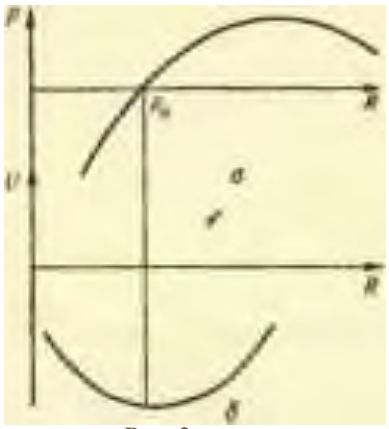


Рис. 2

видно, что монотонный характер магнитной силы нарушается. В случае взаимодействия магнита и витка с нулевым замороженным потоком (кривая *4)* при сближении сила отталкивания увеличивается по величине, достигает максимального значения, а затем уменьшается до нуля при $R = 0$. В случае замораживания потока на нулевом зазоре сила магнитного притяжения (кривая *3* на рис. 1) при сближении удаленных магнитов также увеличивается и, достигая максимального значения, уменьшается до нуля при R -= 0.

Два случая, рассмотренных в работе (911, не отвечают магнитной потенциальной яме. Для существования минимума магнитной энергии (рис. 2, б) необходимо, чтобы нуль магнитной силы был на некотором конечном расстоянии $R = R_O > 0$ и чтобы при переходе через это положение магнитная сила изменяла знак (вместо магнитного притяжения при $R > RQ > 0$ должно быть магнитное отталкивание при $0 < R < R_O$, *рис.* 2, а).

Глава 2
ПЛАНЕТАРНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

§2. 1. «Проблема 1/Дз*

Представление о динамической магнитной конфигура пии, по-видимому, впервые возникло у В. Гильберта (12]. Наблюдая за поведением железных опилок на шарообразном магните и зная о компасе, он предположил, что Земля — большой магнит. Это открытие рассматривалось Гильбертом как промежуточный

этап. Главной задачей для него являлся переход от опытов с магнитами к «общей природе всей Земли», к вопросу о том, как устроен мир. Поэтому восхищенный только что появившимся учением Коперника и защищая его, Гильберт распространил причину движения плавающего по воде магнита на причину движения планет: «...Земля под влиянием свойственного светилам магнитного разума совершает вращение для того, чтобы от постоянного изменения света постоянно происходила смена вещей: жара и морозы, рождение и гибель, день и ночь, утро и вечер, полдень и глубокая ночь» [12, с. 2881; «Причины суточного движения, следует искать в магнитной силе» (там же, с. 296); «Подобно тому, как магнит, носясь по воде в соответствующем сосуде..., так и полюсы Земли, если бы она отклонилась от естественного и истинного своего положения в мире..., вернулись бы назад... посредством магнитного движения...» (там же, с. 165).

Если Гильберт легко распространил магнитные явления для объяснения движения планет, то Ньютон оказался в этом отношении более осторожным. Он хорошо понимал сходство магнитных и гравитационных сил [41, с. 281: «...действие того же магцита более сильно на близком расстоянии, слабее — на дальнем, или сила тяжести больше в долинах, слабее на вершинах высоких гор и еще меньше (как впоследствии будет показано) на больших расстояниях от земного шара» Магнитная сила как аналог используется также в других местах «Начал» (см., например, определения 1, IV на с. 26, 27). И даже в том месте, где устанавливается основная часть закона тяготения, эту аналогию Ньютон продолжает использовать: «...тяготение ко всей планете происходит и слагается из тяготений к отдельным частям ее Подобного рода пример имеется в притяжениях магнитных и электрических,— притяжение целого происходит от притяжения к частям» [41, с. 5181. Однако формулировка основного закона у Ньютона относится только к тяготению, а не к электрическому или магнитному взаимодействию Он выделил тяготение как новый вид взаимодействия, который не сводится к уже известному в то время взаимодействию магнитов В отношении магнетизма он только отмечает, что «...это не может быть изложено вкратце, к тому же нет и достаточного запаса опытов» [41, с. 6621.

Так же, как Ньютон не соблазнился приписать магнитную природу взаимодействию планет, открывший структуру атома Резерфорд принял электрическую природу взаимодействия частиц атома, хотя несколько раньше наряду с томсоновским «пудингом» предлагался атом «Сатурния» с гравитационной природой [65, с. 2231.

Найденная Гильбертом магнитная планетарная система долгое время оставалась забытой и неизученной. Интерес к ней возродился намного позже в связи с проблемой ядерных сил. В 1926 г., т. е. когда ядро предполагалось состоящим из протонов и электронов (нейтрон еще не был известен), Френкелем было сделано предположение [85, с. 4761 «Если приписать электронам магнитный момент, равный по величине магнетону Бора, то их магнитные взаимодей-

ствия, которые, как известно, обратно пропорциональны четвертой степени расстояния, на расстояниях, меньших 10~[п] см, должны превышать электрические (кулоновские) силы отталкивания... Представляется возможным утверждать, что структура атомного ядра практически не зависит от электрических зарядов электронов и протонов и должна определяться в основном их магнитостатическим взаимодействием... Например, оказывается, что электрон и протон могли бы оставаться в статическом равновесии на расстоянии 5-10–[и] см друг от друга. Это равновесие было бы, однако, неустойчивым... Предполагая, что электрон вращается вокруг ядра, кроме обычной одноквантовой орбиты радиуса 0,55 • 10^ см, мы получаем еще вторую одноквантовую орбиту радиуса 3 -10' [м] см, обусловленную магнитным притяжением, причем электрическое притяжение играет в этом случае роль слабого возмущения. Упомянутая величина очень близка к размерам простейших ядер».

В этом предположении в основу строения физического объекта (ядра) положена планетарная система магнитно взаимодействующих частиц. Используя закон магнитной силы двух диполей, найден порядок линейного размера, когда магнитное притяжение в необходимое число раз больше электрического отталкивания протонов.

Однако Френкель не изучил устойчивость редложенной магнитной системы. Рассмотрим свободную материальную частицу в центральном силовом поле с потенциальной энергией U — —UR^e, где R — расстояние от частицы к притягивающему центру; в — положительная постоянная. Обозначим через E и M интегралы энергии и момента импульса, которыми в данном случае динамическая система обладает. Предположим, что $M\Phi 0$. Известно (см., например, [45, § 141), что плоское движение частицы можно свести к одномерному движению с потенциальной энергией:

$$U __ U + \qquad \text{<2-'>}$$

Из положительности кинетической энергии

$$\text{-=Т--}^{\pounds} \bullet \qquad \text{Р•2>}$$

следует, что R может быть равно нулю для е > 2.

Можно показать, что падение на притягивающий центр связано с устойчивостью орбитального движения в э* даче двух тел. Выпишем достаточные условия устойчивости траектории R — (г® -f- г[а])'/* = = const в задаче Фату [24, с. 351]:

где r, t — цилиндрические координаты точки; $U,,$ Urr, Utt — соответствующие производные потенциальной энергии, вычисленные на невозмуи^енной граажори [г] = $Л$. • 0,. г = 0. Для случая irne *****

$$Зго'u, + Urt > 0, Ua > 0, \qquad (2.3)$$

1*.- н *З

U = - I //?'

$$u, = e/r5^{+'}.\ U,, = \sim E\ (E + l)/r£+^{l},\ U,, = e/r?^{+2}, \qquad (2.4)$$

а неравенства (2.3) с учетом значений производных потенциальной энергии удовлетворяются при условии е <2.

Имея условие устойчивости, можно проверять различные физические поля на «тест е % 2». В частности, для гравитационного взаимодействия двух точечных масс энергия U обратно пропорциональна первой степени расстояния (е = 1 < 2). Такой же закон имеет место для электрического взаимодействия двух точечных зарядов. Поэтому гравитационное взаимодействие точечных масс и электрическое взаимодействие точечных зарядов допускают устойчивые планетарные системы[8].

Проверка на «тал е % 2» энергии взаимодействия двух магнитных диполей Xi, X,

$$u\ \dagger \qquad \text{----- 3 <4 ᵖНЧ *1} \qquad (2.5)$$

показывает, что в данном случае имеет место падение, так как е = = 3 > 2. Это обстоятельство привело Тамма к выводу I75I о существенной особенности поведения частицы с «истинным» магнитным моментом: она падает на магнитно притягивающий центр.

Так возникла «проблема $1/R$*» (терминология (I5I), решению которой посвящены работы Тамма 177—79I, Гинзбурга [I4—I7I, Бете [7I, Леви [94I, Клейна [931 и других авторов. Ее смысл заключается в том, что если статические гравитационная, электрическая, и магнитная конфигурации в смысле устойчивости похожи друг на друга (неустойчивы вследствие того, что энергия поля не может принимать минимальные значения не на границе), то для динамической конфигурации вступает в игру существенно новый элемент — скорость стремления к —оо потенциальной энергии при неограниченном уменьшении расстояния. С точки зрения классической механики эта скорость не должна превышать определенный предел. По данному пределу «проходят» гравитационное и электрическое взаимодействия, но магнитное — нет. Магнитное притяжение не оставит свободную магнитную частицу на круговой орбите, и при случайном уменьшении расстояния произойдет схлопывание (коллапс) частиц, при увеличении частица улетит в бесконечность. Нестабильность траектории обязана не излучению, потерям энергии или каким-либо другим факторам. Она возникает только потому, что взаимодействие между частицами магнитное. По этому поводу Гинзбург заключает, что «в классической теории движение пары магнитных моментов будет лимитационным, т. е. произойдет их падение друг на друга, если только не учитывать какой-либо другой энергии, кроме потенциальной и кинетической энергии орбитального движения» [I5, с. 262I.

---

† Мы не учитываем электромагнитного излучения.

В квантовой механике, если учитывать лишь требование непрерывности потока, ситуация аналогична. Потенциальная энергия в отдельных точках не должна стремиться к — оо слишком быстро. Если U будет стремиться к — оо быстрее, чем — $1/R^2$, то нормальное состояние будет соответствовать частице, находящейся в точке R = = 0, т. е. произойдет «падение» частицы на притягивающий центр 1-46, с. 78]. Позже (§ 2.3) мы увидим, что в классическом и квантовом подходах к «проблеме I//?[3]» имеются различия.

§ 2. 2. Учет пространственной протяженности магнитной частицы

Одной из идей разрешения «проблемы $\backslash R3>$ **является идея Гейзенберга о необходимости учета пространственной протяженности магнитной частицы, или, как ее еще иначе называют, «учет реакции собственного поля частицы» I 13, 15]. Известные формулы потенциальной энергии** $V = —\backslash \sim H$ **и механического момента** $K = 1$ **x** H **точечного магнитного диполя** K **во внешнем поле** ff **для протяженной магнитной частицы изменяются к виду**

$$u = — \mathbf{X}\text{-}\ 7 + \mathbf{J}x\text{-}\ HDtrydV, \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$K=i>H + JxxH,D(r)dV. \qquad \textbf{(2.7)}$$

где Hj **— собственное поле частицы;** D **(г) — формфактор;** dV **— элемент объема. Дополнительное слагаемое в формуле для** K **с учетом обычной связи** $K = кM$ **(и — const;** M **— момент импульса) приводит к тому, что в уравнении вращения частицы относительно центра масс** $M = xM$ **X** $И$ **появляется дополнительный консервативный член, позволяющий, как это показано Гинзбургом, ограни чить рост сечения рассеяния с увеличением частоты. Этот результат решает часть «проблемы** MRH**, связанную с задачей рассеяния на магнитном моменте.**

По поводу второй части — избежать падения на притягивающий центр — Гинзбург отмечает [15I, что учет реакции собственного поля также может исключить падение на магнитно притягивающий центр. Качественные соображения, приведенные в [15I, сводятся к тому, что по мере сближения магнитных моментов возрастает кинетическая энергия прецессии. Однако стрвго этот вопрос не рассмот рен [15, с. 262—263]: «следует... заметить, что строго отсутствие падения при учете собственного поля нами еще не показано». Кроме того, учет собственного поля не всегда приводит к возможности избежать падения: «Если магнитные моменты параллельны друг другу и линии, их соединяющей, то U **по-прежнему ~ I//?[8]..., прецессия моментов отсутствует и падение должно иметь место» [15, с. 262263]. Аналогичная ситуация будет наблюдаться и тогда, когда маг нитные моменты перпендикулярны плоскости орбитального движения**

Поэтому теория 113—151, вообще говоря, не разрушает представления о неустойчивости, обязанной магнетизму как виду физического взаимодействия.

Зададим вопрос: асегда ли магнитное взаимодействие дает е > 2? Рассмотрим с этой целью два примера магнитного взаимодействия. Первый пример: соосные кольцевые токи. Известно, что, если кольцевые токи расположены очень близко друг к другу, их магнитное взаимодействие подчиняется закону $U \sim \ln R$, **а это не соответствует случаю е > 2. Следующий пример: две магнитные «гантели». Магнитная гантель — модель длинного цилиндрического магнита в виде двух одинаковых по величине и разных по знаку магнитных зарядов, раздвинутых на конечное расстояние. Взаимодействие двух близких гантелей определяется в основном разноименными зарядами, так как одноименные заряды далеки друг от друга и не дают заметного вклада во взаимодействие. Поэтому мы имеем как бы удвоенную кулоновскую систему с е = 1, что меньше двух. Удаляя гантели, мы уменьшаем разницу в расстояниях между разноименными зарядами и в пределе переходим к дипольному закону в = 3, что дает неустойчивость.**

Эти два примера качественно показывают, что если и можно искать устойчивые динамические конфигурации, то они должны быть тесными, т. е. такими, у которых размер магнитного тела сравним с размером траектории.

Но это, по существу, та же идея Гейзенберга о необходимости учета пространственной протяженности магнитной частицы. Поэтому уместно отметить следующее. Выражение (2.6) — правильная строгая формула, но в общем случае формы частицы и произвольного распределения намагниченности по ее объему дополнительное слагаемое точно определить нельзя. Оно поддается лишь оценке. Это может оказаться неудовлетворительным для вывода об устойчивости, если вывод «чувствительный» к закону взаимодействия.

Чтобы избежать оценок и определить взаимодействие более точно, можно изучать не общий случай формы магнитного тела, а частные случаи, для которых допустимо получить строгую формулу потенциальной энерги и.

Рассмотрим простейший пример: неподвижный идеальный постоянный магнит в форме вытянутого эллипсоида вращения (вектор намагниченности во всех точках одинаков и параллелен большой оси) и свободный точечный диполь X. **В этом примере идея Гейзенберга используется только для одной магнитной частицы (эллипсоид). Для нее^налитически можно получить точное решение задачи расчета поля** H. **Потенциальной энергией свободного диполя в поле эллипсоида будет** $U = — X - И,$ **т. е. она определяется по (2.6), но без дополнительного слагаемого, на что раньше делалась ставка.**

Ниже (§9.2) будет доказано, что свободный диполь может совершать устойчивое орбитальное движение вокруг эллипсоида.

причем эллипсоид должен быть обязательно вытянутым в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, а вытянутость должна быть не меньше определенной величины. Эго значит, что форма магнитного тела оказывает .существенное влияние на устойчивость магнитной планетарной системы. Поэтому лучше пойти на менее общий случай задачи, но избавить себя от неточности определения взаимодействия, «чувствительного» к выводу об устойчивости

§ 2. 3. Другие варианты решений «проблемы 1/Д^3»

Тот факт, что ядерный потенциал точечных частиц оказывается пропорциональным $I/\#^8$**, приводит к невозможности существования решения полной системы стационарных состояний. В связи с этим Бете предложил «обрезать» потенциал на малых расстояниях и заменять его другим, не допускающим решений, отвечающих «падению». По мнению Гинзбурга, операция «обрезания» потенциала носит «формальный характер, является нерелятивистской и может оправдываться лишь надеждой на то, что более полная и более точная теория автоматически приведет к какому-то изменению потенциала (или даже более глубокому изменению всей обычной схемы введения ядерных сил), которое эквивалентно некоторому „обрезанию”» [15, с. 2541.**

Чтобы избежать «обрезания» потенциала, Меллер и Розенфельд использовали комбинацию векторного и псевдоскалярного мезонных полей. Их схема была улучшена Швингером. Суть этих улучшений — попытка исключить недопустимые полюсы типа !/j?^{s} и $1/\#_в$**, которые появляются в «смешанных» теориях в точной релятивистской постановке. Тамм, однако, показал 177], что учет релятивизма не устраняет трудностей, связанных с полюсом** $1/R^*$**. В псевдоскалярной мезонной теории [7, с. 364] выражение для ядерного потенциала содержит потенциал Юкавы и член, описыва емый б-функцией (контактное взаимодействие). Обычно член, учитывающий контактное взаимодействие, не принимали во внимание. Однако Леви [94] в 1952 г. показал, что именно учет б-члена приводит к появлению отталкивания на малых расстояниях. Идея Леви состояла в том, что невозможно точно фиксировать положение нуклона Любое взаимодействие между нуклонами «размыто» по области, имеющей размеры по крайней мере** HMc**. Благодаря «размытию» б-функции, дающей отталкивание, оказывается, что ее наличие в ядерном потенциале влияет на поведение волновой функции. Леви доказал, что учет б-члена дает отталкивание на малых расстояниях, причем это отталкивание достаточно велико, чтобы компенсировать взаимодействие притяжения. Результаты Леви существенно развиты Клейном [93], Брюкнером и Ватсоном.**

Таким образом, основная идея возможности превращения ядерного притяжения на больших расстояниях в ядерное отталкивание

на малых имеет квантовую природу и связана с принципом неопределенности Эта идея и ее результат не устраняют представление о неустойчивости магнитной планетарной системы.

§ 2. 4. Особенности новой постановки задачи

В гауссовой системе единиц уравнения электродинамики движущихся сред в общепринятых обозначениях имеют вид (см., например, [43, 551)

$$rot\,H = -\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j, \qquad rot\,E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{2.8}$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} B = 0, \tag{2.9}$$

$$D = \varepsilon E + \frac{4\pi}{\varepsilon - 1}\chi, \quad B = \mu H + 4\pi M, \tag{2.10}$$

$$D \cdot n = \text{const}, \quad B \cdot n = \text{const}.$$

$$n \times E = \text{const}, \quad n \times H + \frac{1}{c}(v \cdot n)B = \text{const}, \quad \rho + \frac{1}{4\pi}\operatorname{div} D = \text{const},$$

$$P_1 = \frac{1}{c}\int \rho(v \cdot B)\,dS, \quad P_m = \int \operatorname{rot} M \times H\,dV +$$

$$+ \int \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \times H\,dV, \tag{2.12}$$

$$V = R + \rho \times r, \quad mR = P_e + P_1, \tag{2.13}$$

$$\rho_0 = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\varepsilon - 1)E + \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}[r \times (M \cdot \nabla)H] - \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}[r \times (v \cdot \nabla)D] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(r \times \nabla)(M \times H) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(v \times r)\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}.$$

Они состоят из уравнения Максвелла (2.8) — (2.)0), условий на границе (2.11), выражений для электрической и магнитной сил (2.12) и уравнений динамики (2.13).

Записанная система справедлива при следующих допущениях.

) Движение медленно и фиинтио I, $V \ll c$. (с этом случае преобразования Лоренца совпадают с гаооелддвскеме и возможно использование уравнений классической механики. Кроме того, в отношении поля любую систему координат можно считать инерциальной, ограничиваясь, таким образом, специальной теорией относительности.

2. Длина волны $\lambda \sim c/\omega$), отвечающая частоте поля ю в вакууме, велика по сравнению с размерами тела / (ю <£ c/v). Это позволяет пренебречь эффектами, связанными с конечной скоростью распространения возмущений электромагнитного поля.

3. Период изменения поля велик по сравнению со временем.

характерным для микроскопического механизма проводимости (сот <£ 1. m — время свободного пробега). Это — условие примени мости закона Ома j — aE

4 Расстояния, на которых заметно меняется поле, должны быть большими по сравнению с длиной свободного пробега (исходные уравнения (2.8) — (2.10) микроскопичны). Это условие может относиться, например, к «глубине проникновения» б ~ c.

5. Отсутствие стрикционных явлений (зависимости диэлектрической е и магнитной р проницаемости от деформации). Это позволяет сохранить связи между векторами поля в виде (2.9), (2.10) и рассматривать упругие и «полевые» эффекты независимо.

6. Система источников электромагнитного поля находится в термодинамическом равновесии (термическом, химическом и механическом) 4 Это условие позволяет вычислить электромагнитную силу с помощью тензора напряжений T постоянного электрического и магнитного полей, в котором отсутствуют члены, обусловленные деформацией (за счет механического движения и поля), а также другими термодинамическими величинами (плотностью, температурой, химическим потенциалом и т. д.). Использование тензора T сводит электромагнитные силы, действующие на тело, к давлению, передаваемому через поверхность, внутри которой находится тело.

7. Рассматривается движение относительно инерииональной системы отсчета. В качестве уравнений механического движения используются законы сохранения импульса и момента импульса. Отметим, что эти уравнения могут быть записаны в форме Лагранжа или Гамильтона. Если кроме электрических и магнитных сил участвуют силы другой физической природы (например, гравитационные), последние должны быть добавлены в качестве независимых слагаемых главного вектора и главного момента.

Система уравнений (2.8) — (2.13) записана с точностью до членов $Vc^{\sim l}$ включительно. В неуправляемой магнитной системе скорости изменения магнитного поля определяются скоростями механиче ского движения. Электрическое поле имеет порядок E $c^{\sim l}BU\sim$ ss «Мс-,В. Пренебрежение членами порядка $Vc\text{-}^{1}$ *в* магнитной системе со скоростями меньше 1 см • с$^{\sim 1}$ при наличии силы тяжести эквивалентно неучету сил порядка 10$^{-м}$ g. Действительно, так как Ю$^{\sim >0}$ и меньше, а электрическая сила пропорциональна E\ для магнитных сил, имеющих порядок силы тяжести, неучитываемая сила по порядку равна l0$^{—20}$g. Однако, если бы мы попытались создать измеритель силы, имеющий чувствительность выше 10$^{\sim м}$ g, в теории прибора необходимо было бы использовать исходную систему уравнений (2.8) — (2.13) или ее аналог.

* Что касается механического равновесия, то оно осуществляется в системе координат, жестко связанной с телом, а при пренебрежении W"^{2} (условие I) силы измеряются одинаково в неподвижной и подвижной (как угодно) системах координат.

Необходимо отметить также, что при характерных скоростях порядка $Vc\sim^{l}$ < 1О–[10]и смещениях порядка 10~[13] см для свободного тела массой 0,1 г произведение величин, имеющее размерность «энергия х время», имеет порядок постоянной Планка:

$$mW \sim 0{,}1\ г \cdot 10^{\text{“““}}\ см \cdot О'^{4} \blacksquare И)'^{\text{”}}\ см \sim 10^{-и}\ эрг \cdot с \sim Й.$$

Это значит, что макроскопическая система не может быть описана уравнениями классической механики (2 13) в силу приниипа неопределенности [30, с. 26—301.

В данной работе вопросы динамики магнитных систем рассмотрены в предположении, что членами порядка Vtr^{1} можно пренебречь. Тогда исходные уравнения электромагнитного поля распадаются на две независимые части — для электростатического и магнитостатического полей. Так как изучаются магнитные системы, уравнения

$$\text{rot } Я = \qquad \text{div } B = 0,\ В = Я + 4л/,$$

$$(B == рЯ),\ B \blacksquare n = \text{const},\ n \times Я = \text{const} \qquad (2.14)$$

и уравнения классической механики (2.13) — исследу^ый здесь предмет.

Таким образом, динамическая система магнитно взаимодействующих свободных тел на языке дифференциальных уравнений понятна. Однако такое понимание мало что дает. Дело в том, что сами по себе уравнения поля в случае произвольной системы магнитных тел и уравнения динамики — чрезвычайно трудные математические объекты. Поэтому должны быть дополнительные упрощения. Здесь они сводятся к следующему.

Рассматриваются конкретные модели магнитного взаимодействия. Первая модель (у Смайта [73, с. 419] такая модель названа «магнитной иглой») — магнитная «гантель» — позволяет описать взаимодействие длинных цилиндрических магнитов.

Несмотря на то что гантельная модель связана с фиктивными магнитными зарядами, она целесообразна по следующим соображениям. Во-первых, в этом случае без интегрирования уравнений (2.14) можно определить потенциальную энергию магнитного взаимодействия. Во-вторых, это— обобщение дипольного магнитного взаимодействия. В формуле для энергии взаимодействия гантелей должен быть параметр /р— (/ — размер гантели; р — расстояние между гантелями, или «размер» траектории), от которого зависит орбитальная устойчивость. Действительно, при /р~1 -> 0 получаем дипольный закон с неустойчивыми орбитами. Но при $1(m\sim\sim$ оо взаимодействие будет кулоновским (обратно первой степени $q\}$, что проходит по «тесту *в* % 2» как устойчивое.

Другой моделью протяженного магнитного тела, которая рассмотрена в этой работе, является недеформируемое токовое кольцо (идеально проводящее, т. е. не обладающее электрическим сопро

тивлением). Здесь оказалось удобным использование результатов Уайта и Вудсона [81, гл. 1]. Формулы магнитных сил выражаются не через параметры поля, а с помощью параметров магнитных цепей (потокосцепление или поток, ток, взаимная и собственная индуктивности). Вместо уравнений динамики в форме (2.13) используются уравнения Лагранжа, в которых роль лагранжевых координат играют и механические координаты, и магнитные переменные — либо потокосцепления, либо токи.

Таким образом, чтобы определить магнитное взаимодействие, уравнения магнитостатики (2.14) для магнитных гантелей и токовых колец не понадобились. Необходимость в этих уравнениях возникла лишь для двух типов магнитных систем. В одной из них рассматривается система эллипсоид—магнитный диполь (или диполи), в другой — два постоянных магнита, ограниченные сферическими поверхностями. Такое небольшое число форм обусловлено двумя конкурирующими факторами — желанием получить точную формулу потенциальной энергии и трудностями интегрирования уравнений магнитостатики для тел сколь-нибудь сложной формы (естественно, при условии, что тела расположены произвольно относительно друг друга). В известных работах также рассмотрен в основном шар. В частности, работы [48—50] посвящены изучению сил, действующих на ферромагнитный или проводящий шар. В работе [831 исследовано взаимодействие сверхпроводящего шара с кольцевыми токами. Если форма тела и отличается от формы шара (например, при изучении вопроса о моментах, возникающих в результате неточного изготовления сферического ротора [54, 821), это отличие мало и не связано с возможностью интегрирования уравнений магнитостатики для области сложной геометрии.

Вторым упрощением, используемым здесь при исследовании магнитной системы, является пренебрежение диссипацией энергии, связанной с вихревыми токами, перемагничиванием, аэродинамическим трением и другими явлениями, возникающими при движении тела в магнитном поле.

Предполагается также, что гравитационное взаимодействие между магнитными телами как некоторыми массами пренебрежимо мало по сравнению с их магнитным взаимодействием. Но магнитно взаимодействующая система с неподвижным телом может находиться в стороннем гравитационном поле, сила которого сравнима с магнитной (см. гл. 8).

Изложенные упрощения относились к определению магнитного взаимодействия. Особенности динамической части задачи определяются магнитной протяженностью тела и нецентральностью магнитного взаимодействия. Протяженность исключает представление магнита материальной точкой — он рассматривается как абсолютно твердое тело, обладающее шестью степенями свободы механического движения. Для такого тела составляются уравнения движения центра масс и уравнения вращения вокруг центра масс. Эти уравнения оказываются взаимосвязанными в силу нецентральности

взаимодействия рассмотренных моделей магнита. Ферромагнитный, проводящий или сверхпроводящий свободный шар, рассмотренный в упомянутых работах,— «неявнополюсный» магнит Его вращение вокруг центра масс и движение центра масс слабо корре- лированы. Поэтому в работах [21, 22, 31], как правило, центр масс предполагается неподвижным и рассматриваются лишь угловые движения тела, т. е. получается тот или иной вариант задачи о твердом теле с неподвижной точкой. В задачах небесной и космической механики [5, 24, 681 корреляция поступательного и вращательного движений также слабая. Это позволяет раздельно изучать, с одной стороны, поступательное движение как движение свободной материальной точки (задача *n* тел небесной механики [23, 241), а с другой — вращение спутника вокруг неподвижного центра масс [5].

Динамика изучаемых здесь тел как «явнополюсных» магнитов такова, что поступательное и вращательное движения сильно кор- релированы, задачи *n* тел и тела с неподвижной точкой взаимосвязаны.

Ч а с т ь II

Взаимодействие тесной системы магнитных тел

Глава 3
ДЛИННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ МАГНИТЫ

§ 3. 1. Эквивалентность «гантели» полю длинного цилиндра

Простым расчетом [73, с. 419—420] можно показать, что поле на оси длинного цилиндрического магнита таково, как если бы его создавали одинаковые по величине и разные по знаку точечные магнитные заряды (полюсы) на торцах цилиндра («гантель»), Этот результат может быть усилен доказательством эквивалентности поля магнита полю зарядов не только для точек на оси цилиндра, но и для любых точек пространства, удаленных от наружной поверхности магнита.

Вектор-потенциал поля, создаваемого намагниченностью J, **выражается в виде [73, с. 418; 61, с. 142]**

$$4\pi A = \int J \times r^{-1} dV + \int_S r^{-1} dV + \int_S \sigma^{-1} \times dS.$$

где интегрирование производится по объему и по поверхности магнита. Для однородно намагниченной области (намагниченность 7 — постоянный по величине и направлению вектор) объемный интеграл, содержащий V x J, **равен нулю.**

В случае длинного цилиндра *(a, 21* — **радиус и длина), однородно намагниченного по оси, на торцах** $J \times dS = 0$. **Поэтому, вводя цилиндрические координаты р, Ф,** z, **из предыдущей формулы получим, что** A **будет иметь лишь одну составляющую:**

$$A_\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{-l}^{l} J \cos\varphi \, d\varphi \, dz \Big/ \sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\varphi + (B -$$

По переменной ф здесь такой же эллиптический интеграл, как и в задаче о вектор-потенциале токового кольца (см., например, [73, с. 128]). Его вычисление упрощается, если учесть условие малости

радиуса цилиндра по сравнению с длиной. Вводя малый параметр в = оо'* = a Ip® (z—z*)[8]^**' 1, из предыдущей формулы получим

$$Л^* \qquad p\,((P'' + (1-г)T^{Л+} |P^{!} + \blacksquare\,(' + *)Ч''- \}^{+}$$

$$+ {}^{0}\,(\text{„I} + \text{“--в.'}) -$$

Отсюда находим формулы для компонент магнитной индукции: $в = \underline{И_0}\ J_a i$,

$$\frac{C}{{}^{,И} I\,[P^P\text{-}гЯ''} \qquad \frac{P}{|P'+(1+!)\blacksquare]\bullet'\bullet)\blacksquare} \qquad \frac{1\ д\ A}{* \qquad ' (3\ *.}$$

$$B, = {}^{+Л}\{\text{----------}\text{——}\blacksquare\text{----------}\text{——}и\text{-}1\ \bullet$$

$$* \qquad {}' I\,[p^* + (2 - «>\bullet!'\bullet \qquad [p^* + (г + !)\bullet\blacksquare\bullet'\bullet I\ \bullet$$

которые совпадают с выражениями для компонент вектора электрической индукции, если в точке (0, ф, $[)$ поместить электрический заряд $qx \quad »_4\ naЧ,$ а в точке (0, ф, $— Г)$ — заряд

<г = ■ < $naЧ.$ Это совпадение распространяется уже не только на точки оси цилиндра. Оно выполняется для точек, цилиндрические координаты которых удовлетворяют условию р a ($г$ — любое) либо | z| > ' (р — любое).

Очевидно, поле любой системы длинных цилиндрических магнитов, однородно намагниченных по оси, может быть заменено полем гантелей, если будет выполнено условие малости радиусов цилиндров по сравнению с наименьшими расстояниями между поверхностями магнитов. Преимуществом такой замены является возможность определения взаимодействия цилиндрических магнитов по кулоновскому взаимодействию точечных зарядов.

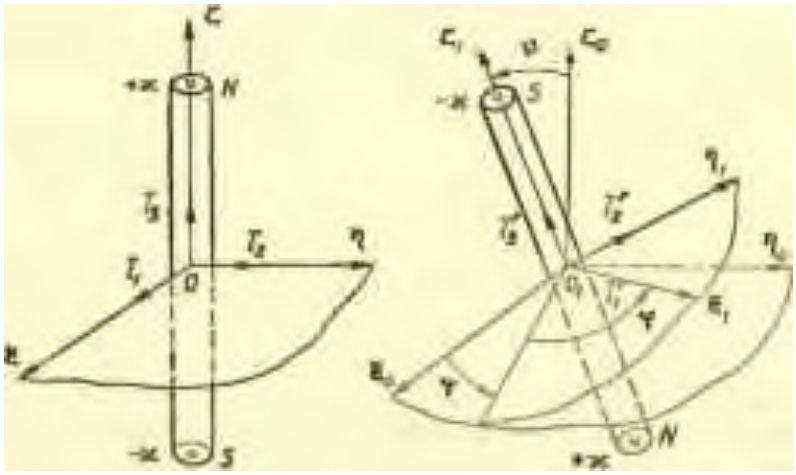
§ 3. 2. Потенциальная энергия двух магнитов

Рассмотрим два длинных цилиндрических магнита, однородно намагниченных вдоль своих осей. Один магнит радиусом ax и длиной 2/(% >< 0 предполагается неподвижным, другой магнит радиусом Оа и длиной $21\ (a$ -£ Z) — свободным (рис. 3).

Каждый магнит будем рассматривать как два точечных заряда + х и — к, расположенных на магнитной оси магнита и удаленных один от другого на конечное расстояние 21 для обоих магнитов.

Для определения потенциальной энергии двух таких магнитов введем три системы координат (см. рис. 3). Ось 0£ неподвижного трехгранника О£г)£ (рис. 3, $а)$ с ортами 7„ i_t, i_s направлена по магнитной оси неподвижного магнита, а начало $О$ *находится* посередине магнитных зарядов+х и—х. Начала двух остальных систем координат помещены в центре масс свободного магнита $О_t$. Оси трехгран-

ника О&лО® (рис. 3,6) во время движения остаются параллельными соответствующим осям трехгранника С£Т1С, а трехгранник $O_{(}1_{(}$»цС| с ортами 7|, $7_{г}$, ($_{з}$ жестко связан со свободным магнитом. Его ось O,L направлена по магнитной оси свободного магнита, заряды —х и +х удалены от О! на расстояние I, причем в положительном на-



а *S*

Рис. 3

правлении оси $O_{(}$Са удален не заряд +х. как для неподвижного магнита, а заряд —х.

'Используем в качестве степеней свободы цилиндрические координаты р, a, £ точки О, в неподвижной системе *01* Т|£, а также углы Эйлера ft, ч>. Ф между трехгранниками и О&т^. (О — угол нутации; ф — угол прецессии; Ф — угол собственного вращения).

Введем также векторы расстояний между магнитными зарядами $R1$, Ra, R». $R^{*'}$ 1 — й» T = «3 (рис. 4). Если R — радиус-вектор центра масс $O_{ь}$ то из рис. 4 следуют векторные равенства:

Rk = R + (- 1)4 + 6* = 1, 1, —1, —1 (f = 1, ...,4).

(3.2)

Выражая орт % через орты ц, T i_{s} и углы Эйлера

=s sin ф sin Oi, — cos ф sin Oi, + cos fti, (3.3)

и учитывая, что R — pcos ai, + p sin at, + £»„ из (3.2) получаем

$$R_{k} = \{p® + p \sin^2 6 - f 26^* p \sin 6 \sin (ф — a) - f$$

$$+ £ + 6^* \cos ft + (- 1)^{‘}Z|^{J}\}V'. \quad (3,4)$$

Потенциальная энергия пары зарядов, взаимодействующих по закону Кулона, равна +х‘#Г' Для одноименных и —x^2/?^1 для разноименных зарядов [451. Взаимодействие зарядов какого-либо

одного магнита можно не учитывать, поскольку сила притяжения между ними является внутренней. Поэтому потенциальная энергия взаимодействия двух магнитов определится суммой членов ви.

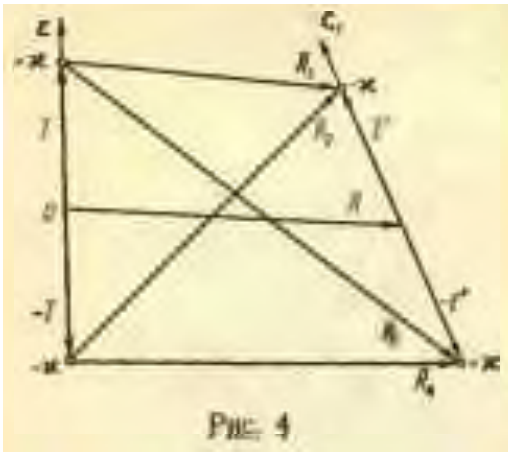


Рис. 4

да ± $n^{\wedge}R$, четырех пар магнитных зарядов:

$$U = \underset{Si}{X^2}\ X\ A^*\ \{p® + P\sin®0\ f$$

$$f\text{- }2б^*p'\ \sin 0\ \sin(-ф — ct)\ 4$$

$$+ (C + в^*O»0 + (- 1)‘И^*ГЛ$$

(3.5)

Д* = -1, 1,1, -1

(A=l 4).

В дипольном приближении (Z -■ 0, 2/и К X — магнитный момент) выражение (3.5) переходит в известное выражение энергии взаимодействия пары магнитных моментов $kj = ki_B, X, =$ —

$$И = (X, \cdot X,)\ R\sim^{S}\!\!—З\ (k_t \cdot R)\ (X ■ R)\ RT^*.$$

если только разложить (3.4) в ряд Тейлора по I (вплоть до членов с /2) и учесть, что

cos (&, kJ = — cos O,

cos $(k,,$ Я) = £(рг + O”’’[1],

cos (Xa, R) = — (p sin O sin (if — a) + £ cos dj (p“ -f f^’*.

§ 3. 3. Произвольное число свободных магнитов

На рис. 5 изображены два свободных длинных цилиндрических магнита, намагниченных, как показано буквами N и S Они произвольно ориентированы относительно некоторого неподвижного трехгранника 0£г£. сохраняющего неизменную ориентацию в пространстве. В центрах масс $O_{(}$ (t = 1,2) каждого из магнитов расположены начала двух систем отсчета О£оП<&о и причем оси трехгранников О^Пм&в и О,£пПмС« во все время движения остаются параллельными соответствующим осям трехгранника ОЕггё (O_tg1„„ O2E20 II и т. д.), а оси трехгранников жест ко связаны с соответствующими свободными магнитами таким образом, что совпадают с главными центральными осями массовых моментов инерции. Оси О,?, и О^ совпадают с магнитными осями магнитов. На положительном направлении СЦ, расположен северный полюс N первого магнита, на положительном направлении 02^ — южный полюс другого магнита S. На рис. 5 изображены также

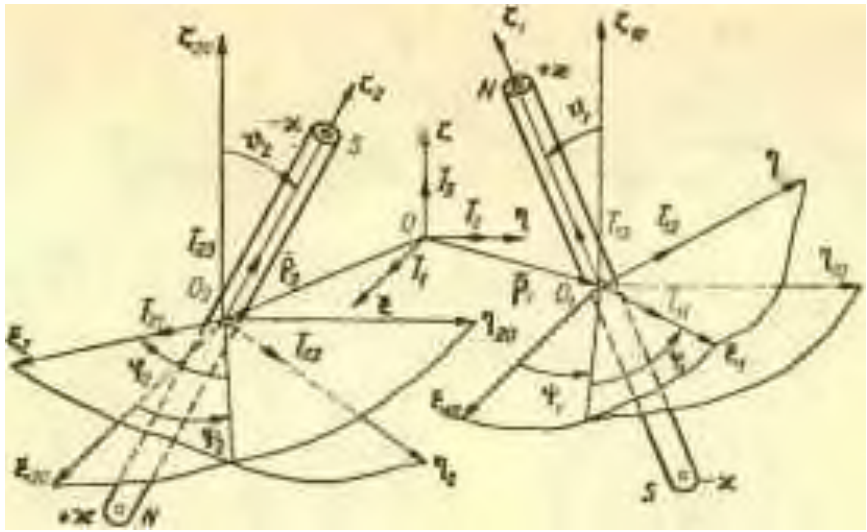


Рис. 5

орты ц, i, трехгранников OrCO^iobo иГ$_и$, (и, & трехгранни ков О&тьЬ.

Ориентацию /-го магнита относительно трехгранника С£т|£ (или же О&троЫ будем определять углами Эйлера 6_t, ip„ <Р, где О, — угол нутации (между осями o<6о и о<&); — угол прецессии (между осью $O\&o$ и линией узлов $O_(P_l)$; — угол собственного вращения (между линией узлов OP и осью 0,Ъ). Радиус-вектор р(центра масс /-го магнита будем определять цилиндрическими координатами р(, at, Ъ точки $o_ξ$ в системе координат о|т£ (р — радиус; а — угол, а £ — аппликата орбиты).

Учитывая знаки зарядов на рис. 6 и номер индекса k соединяющих их векторов R_k, для потенциальной энергии записываем

U = и^r V Д^^{1}, Д* = — 1, 1, 1, —I дляй-1 .....4. (3.6)

Далее, из рис. 6 следуют очевидные векторные равенства

$$Rk — P, — pi — AJ, — (— l) G» 6_{fc} = 1, I, — 1, — I$$

для f=l, 4, (3.7)

где /, = Ij_a ((=1,2) — векторы о началом в точке О, и концом в точке расположения магнитных зарядов. Учитывая связь между ортами /в и £, (~ через углы Эйлера

$$1M = /i \sin 6_(\sin ф_r/_(— l,\sin b, \cos + h\cos ♦A (* = I. 2) (3.8)$$

и записывая векторы

$$Pi = pi \cos aA -f- Pi \sin a,4 + СЛ * = » 2) , (3.9)$$

с помощью формул (3.7) — (3.9) можно получить представление векторов Rk в виде разложения по ортам $1\ it,\ is$- Найдя затем квадраты модулей как сумму квадратов проекций и используя (3.6), после преобразований получаем искомую потенциальную энергию магнитного взаимодействия двух свободных цилиндрических магнитов:

$$U = к^* X, Aft \{pi + pl — 2p,p^* \cos (a, — aj + Z + / | f (£, — £_l)^S + + 2 */» \sin f^* [p_2 \sin$$

$$(ф, — a,) — \sin (ф^* — a,)] + + 2 (— 1)^* /, \sin ft, [p^* \sin (ф, —$$

$$— «^*) — Pi \sin (ф, — a,)_1 + + 2^^/, [\sin ft, \sin 0_8 \cos (ф? — — Фа) + \cos 61 \cos 0J + 2$$

$$(Cg —$$

$$[«A «»<>,+(-1)4 x x a\text{-}sOj\}\text{-}*/.. \ {}^{(}3\ i_{O}j$$

Из этой формулы как частный случай ($p_8 = £g = o1\ O_8 = o$) следует результат предыдущего параграфа. Она допускает также обобщение на случай произвольного числа длинных цилиндрических магнитов, если численные индексы заменить на буквенные, скажем на i и у, вместо и* записать $xf,$ и просуммировать по $i,$ /, исключив случай i — /:

$$V = £ (< £ 1Л^*(p? + p/ — 2p,p, \cos (a, — a,) + (? + /, +■$$

$$\text{случай } (p_8 = £g = o1\ O_8 = o) \text{ сле}$$

$$+ (C — £)® + 26»// \sin O, [p/ \sin (ф, — a,) — p, \sin (ф, — a,)] +$$

$$+ 2 (— 1)^* l_t \sin O, [p, \sin (ф, — a,) — p, \sin (ф, — a,)) \text{-f-}$$

$$+ 2Д^*/Д, [\sin O, \sin O, \cos (ф, — ф,) \text{-f-} \cos ft, \cos ft,] +$$

$$+ 2 \& - l) [6^ \cos + (- 1)^* l_t \cos \qquad (3.11)$$

где n — число свободных магнитных тел.

§ 3. 4. Несовпадение магнитной и массовой симметрий тела

В рассмотренных выше случаях предполагалось, что центр масс свободного тела совпадает с центром магнита, а одна из главных центральных осей эллипсоида инерции — с магнитной осью.

Представляет интерес получить формулу для энергии магнитного взаимодействия, когда такого совпадения нет. Оно реализуется, например, для составного тела из длинного цилиндрического магнита и жестко прикрепленной к нему немагнитной массы.

Общий случай несовпадения магнитной и массовой симметрий означает произвольную ориентацию магнитной оси относительно

Рис. 7

оси динамической симметрии и произвольное смещение центра магнита по отношению к центру масс

Свяжем с центром магнита O_i какого-нибудь тела с номером i начало трехгранника ОЛпЛ/. направив ось OZ. по магнитной оси в сторону, где находится положительный магнитный заряд +х (рис. 7). В центре масс этого же тела поместим начала трехгранников 0*О*оWo£/< и О,'&\k* Оси последнего направим по осям динамической симметрии тела, а ориентацию осей о*Е/п> ОЛгро. сохраним неизменной параллельно соответствующим осям инерциального трехгранника О?т)£- Зададим ориентацию трехгранника О&i)& относительно трехгранника о*6'л]/Ь' углами Эйлера ft', ф,, Ф , а положение точки O_i в системе отсчета O_i*Ет])*£* —цилиндрическими координатами рГ, а*, £*. В качестве степеней свободы выберем, как и раньше, цилиндрические координаты а<, точки Q в системе отсчега и углы Эйлера ft_i, $ф_i$, $ф_i$ определяющие взаимную ориентацию осей трехгранников OГ&иЛ и О<^стКойо.

Составим векторные равенства, очевидные из рис. 7:

$$Rk = \text{+- (— 1) } U + p_m \text{ — p +• pm — p/,} \qquad \text{(3.1))}$$

6* = 1, — 1, — 1, I для k = 1 4,

и используем две таблицы направляющих косинусов — между осями трехгранников O£n& и *O'^C-*

	&	%	
I	assqyassty' —	— sin cj)'cc^s% —	snn (*" sin б*
	— sin ф sin я/ cos 0,	—cos ф* sin (y cos ft*	
	«к ф/ sta t- +	— sin ф' sin t* +	— cost, sin O* (3.13)
	4- sin ф/ cos ф cos o/	-f- cos ф* cos (y cos 0*	
	sin ф sto Ф	COS<]* shn^f	COS <tz,
а также между осями трехгранников o*§'*1'Ь* 1			* *C&Л:*
			&*
	COвф, ass ——	— sin ф$_{г}$ссяЯу—	
	— sin<p, sin (y cosO,	— совф, s nif, cosfy	sin i|y sin 0,
	cos ф, sin % +	— sin ф, sin (y +	. A (3.14)
Ч	+ Stf^/COStf, cosft.	-(- cosqy cos)y costf,	— cos If- sin
C	sin Ф, sin 0,	cos ф(sin ft,	cos it,.

Эго позволит получить расстояние между магнитными зарядами тел с номерами *I* и *m* и потенциальную энергию магнитного взаимодействия в общем случае несовпадения магнитной симметрии длинных цилиндрических магнитов и осесимметричного распределения масс «роя» *n* свободных тел:

$$U = t\,>C\,J]\,\{A^{*}\{p?\,+\,Pm\,+\,Pt^{S}\,+\,pm\,+\,''\,+\,in\,+\,(£\,—\,Ст)^{*}\,+$$

$$+\,СГ\,+\,U\,—\,2p,pm\cos(a,\,—\,a_{,,,})\,+\,2p<p,\,[\cos(ty\,—\,a,)\cos(co\,+ф,)—$$

$$—\,\sin((y\,—\,a,)\cos ft,\sin(a\,-f-\,Ф,)1\,+\,2p,£\sin ft,\sin(t(_{f}\,—\,a,-)\,—$$

$$—\,2p,p_{m}\,[\cos((«\,—a,)\cos(am\,+\,фт)\,—\,\sin(t,\,—\,a,)\cos f>_{m}X$$

$$X\sin(a_{m}\,+\,ф,,)|\,—\,2p_{z}\{m\sin\quad\sin(ф_{т}—a,)\,—\,2>nP'\,Icos((y\,—a_{m}\}\,X$$

$$x\cos(at\,+\,ф,)\,—\,\sin(t,\,—\,««)\cos ft,\sin faC\,+\,ф)\,—$$

$$-\quad {}^{2}Pm£\sin 0,\sin((,\,—\,a_{m})\,+\,2pmm\,|\cos(tp\,—\,am\cos(a^{\wedge}\,+\,Фт)\,—$$

$$—\quad\sin(iy_{m}—a_{m})\cos 0_{m}\sin(a'm\,+\,Фт)1\,+\,2pm£>\sin tim\sin((y,—+$$

$$+\,2££^{*}\cos O,\,—\,2'U\cos 0/\,—\,2£,,\,cosi>m\,+$$

$$+\,2ЦЦ,\cos 0_{m}\,+\,2\,(£\,-\qquad\cos 0,\cos 0,^{*}\,+$$

+ (— 1)* $l_{,,}$ COS «.COS + W.P(I™* W, ~“<> **' Si" +”’ +

4- sin (ф, — a,) cos d, sin «.* COS (ф* + Ф) + sin », cos fl. sin (*, -*aft* +

+ 2 (— 1)* i^p. ICOS (ф„ — СЧ) sin ♦„ sin (фт 4 Ф„) 4

4 sin «.COSdi, sin (фт - aa 4 sin (Ф*- a,) cos d_m sin C. cos (фт 4

4 q.)) _ 2d*/,p_m [Cos (ф, — a.) sin *d* sin (ф + ф) +

+ sin (ф,—a.) cos di sin d* cos (ф,‘ 4 Ф) + sin 6, cos 6, sin (ф< —

—a.)| —2 (— 1)* /«p. [cos (ф„—*aj* sin d. sin (фт 4 ФТ 4

4- sin (фт —«■) cos d_m Sin d. COS (фя + ф„) 4

-psin d. cos d. sin (фт — «„)) + $2A_{lr}t_{l}l_{ni}$ cos (%. — $ф_т$) |sin d, sin 0., *

X s. (ф 4 *4»,^* Sin (фт 4 Фт) 4 cos d. cos d. sin di sin d_m COS (Ф* 4

4 Ф,) OS (фт 4 Фт) 4- Sin di Sin d. cos di COS d.) 4

4- $2Д_4/./_m$ [sin di sin d. sin d* sin d„ cos (фГ 4 Ф) cos (фт 4- Фт) 4

4 COS d, COS d_m COS it* COS di|}“’A). (3.15)

Гл ава 4

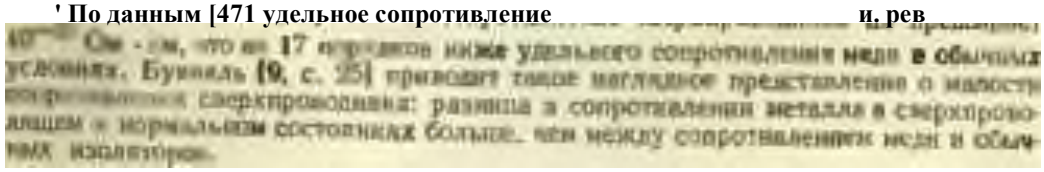
МАГНИТНАЯ ПОТЕН ШИ АЛЬНАЯ ЯМА

$ 4. 1. Идеально проводящий контур с током как модель магнита

Замкнутый контур, лишенный электрического со

противления,
обладает известным свойством сохранять постоянным (говорят еще замороженным) связанный с контуром полный магнитный поток [47, с. 41; 66, с. 251. С высокой точностью идеальная проводимость реализуется в сверхпроводнике®. Однако сверхпроводник — это не только идеальный проводник, но еще и идеальный диамагнетик. Если в идеально проводящем кольце плотность тока одинакова по сечеиию, магнитное поле и ток в сверхпроводящем кольце сосредоточены на небольшой глубине (глубина проникновения Я имеет порядок (4 + 6) 10~®м). Это обстоятельство приводит к различным формулам для собственной индуктивности

' По данным [471 удельное сопротивление и. рев



и

aodXxHOH xHrnBBrotoi" ОНЧРВЭРН авиХво ионхавь а BirXddof exg •NiBHHV^dooM и ииохои ЭННХИНХВН cadoh в ‘гавнин&юх и инох cadah эн аонох xXarr Xirn:> оIXнхннлвw хэвжв<11иа Bi/Xddod) ввннэхХноу is-и • ₺.'!St, к*« ”7'л - "Гл1 ³ι̲ᶜᵏ) “7¹—"7'¹ʔ¹ –**

аРиа а оха warriHuadau Чвнивчкюн хо *(£ | эинэжв±ча а хитпвгоха ‘ниьикэа ихаониэиаеезн Him нхэоинэиаве хнвф qxXHHdahiou Hgoxh и7 яхаон^^^Х^и ввниивеа чтии взхаввав (д >) airXddoJ) а хвнин •dooH иаи^ннХаф •иннъираа аннивахэои ажнвх — aodXiHOx xriwaXd •имйофаФди и7 ,п7 ихэонанхнХ^нн аннпааздсо •ннвннhшraa ииин •нвохаои оходio взхошвав aodXxuoH xmnBfoaodu он^1^в^ГТи авиХиэ а ‘qaoifBbawio ажХ нвм ‘andcuow *в д '*д инохои агонхинхви аинвои иа -ЭНИ хин охаанд хвинохa ан имох нвиа уонхинхви XurXpudoA a adaua£ (Zf) -п^-('|7'л — "7"A)

tj— ‘d

хаXfua (> 0 а (9>) имаонвхзП'ои *q . v

\l ~ “7°7 **9 , ~ "7ⁿ7 ,**

(9 Q) **«7‘Л —W** ⁻¹ **^-“ГА** *1*

маек

•Xrou ‘аонох ончиахиаонхо уННННВdX Хилаи;) НВН (9 t) ВВmadeBj (S'Q *!“7 + >*‘7 - Л «,"7 + '/"7 = 'A

HuXddoj апн

•хээаеи интииве ‘ВННВВохаВd хо аонох члэоннэнаве чхааьХ гдохь

Л1 **и */ инох х<MBWHHHdu винаьвне аинвн ‘хаXfatro ан о » fXwdoJ ей ОМВННQ >aodXx.HOH винажовои ннпмнХф — ■/ и */ -а -х *ва •ланаиеи хXfXg инох ВКНКохоаВd ии^^иеи adu ‘oHrodoHiroaH airou HWBdXxHoH аоиававнеоз нвн НВJ >аиоц ионхинхви waHHodoxa woHtrod •ornroaH а BdXxHoH винажоиои хо нхэоннэняве а внох аннана^и м хНТoaudu внохои охонхинхви ОJОНIТОU нlэоннажodcдве оацзиова ’онч^1эхлнаxl^(этf BdXxHOH охаlrn^^с^du онч1геапп о^ньХь- з н вн^вдоэонэ •Hdu охоum (| >) шиз уонхннлви BiiXwdot ВBwaBHawHdu онычдо O'» -ЧГ^- ф J “г Ч-“-“7г**

~ ᵎd

(с -) **' ТТ'r-'iflVT Ф Ф= *d***

([9ZI ‘921 *ZSI *191 ’dawHduBH * из) Риа xotadH вноnве олохе ИЭИНВЕ апчнннгеаиаяв ааЦ" Bdajwy ионом •ве di4HHUeBHHaddau3MH вс.Lэвl^QaэdlJc aodXxHOH хгч>wXdидd<сфаРан хXair */ <т/ аонох внахэуг»Р^э^чивеа охонхинхви ВВИ)

иилсНэнв иончитвипнахои
ионхинлвп иХмииищ ,; *р* **§**

•edAxxOx wxKJt^mi^cM^odu волч^вяти —‘airad - аьо оюаэ а ‘оахзнвохэои в ‘внохои (ихэоннэж«1оиве) Хаюнваюои ннвевуо вхннiвw xiTanow yowaBhXtH ихаоннэдоэо охь ‘wox xBUHBd -uo BHHwdax охохе dugiag «яох оиня1гез1ги» ‘ahodoM ‘шги «wонох a dXxxOM HHiuBirogodu ончигвЯГи» xxwdai иэчхааоечшоиэи xairXg аэвь -Xiro хихе xXoir вытг womyaxar'Btf g rnrrraodu эна oirou уэпкмва1ихньА ‘ихоонаиххАяни ионнавхэдоэ — XwowoBJBiro Xwoxaохао и чхиавдос owmroxgoox oiXdoxox ‘°7 а'иэюнаихяЛгни уаххadxXxo qm«ir вохсивь -xirxo rodXxxOM уНТНКTrooduxdaao и у1чнч1-вэ1ги ‘wosedgo wнмн£ Biirraodu ojowBdu олонниит ourou оньишанх xdxXxs oirou в ‘rnrcoodu изо вн oirou охаed ижоМваэ oirou охь ‘ховхиьэ и (Blioaodu xdxXxo и эна) ихэвьдо oair xoiBSHdiBwaoBd (ISZ] ‘dawHdueH ‘ wo) оньндо «7 иинэгонына nd|j -BUrraodu xdxXxo oirou охаiravaduo оньох нви и ипнжчдо хэвнамве irBdxaxxx уннуэнтг оннох оячигояэвн ‘wax BoxoBiraffaduo охооxmadxou ввТповннн£og

<5») ₽"7

aodXutoM мчхоонаих •нХунн уохwхesa и BdXxxoM о^хэонаи^:^^^А^^н вэчхваоеч^и ондонА и

vf-ч—к

:BirBdxaiхх охонуэншт эНиа я внвэииев чхнд хawow *Л-~*

- *К*

вивипнэхои оJОHdoiMaa выт BiMwdb$ BBTngo витюх *i* хнiтвw увьАвэ вэчхвьАен хoirXg чзэВ'Е •а1тАн и BDUwedxa (BdX-нгом daweed BHHOxxxBdBX — ***n) _vp — 1*** dxawadBU валон ‘хэвеэьэи энhи^тхо о.^ Buoaodu HdxXHa wairou oodXxxOM хичаояох ^^ттт^^iтоо^l^i^<^^оо нwохоно вitou хо вэхэвьттхо oodXxiOM хнаохох хинчгвэнти iowauНо oirou охь ‘хаXiroira охоннвевиэ е*ц* Birсraodu **qxaowaBnooodu ввнхннjвw — °d anx ‘vg/M = “7 'fgjg *a ‘g*,] онхээа** -ем **нвм** ‘ох **‘(оинэьаэ ou вмох aoooiroaaduaBd aooda>,ooaBd) вминтов -odu agXioxa ooBOoood u aioou ид xoog -Bffoaadu dxawBoio — p aux**

<1 H

ixxxinr уон^^^^ **Btroaodu** ojoHiBimoduxdooo Birir ****7*** XirXwdo} чхиь -Xirou оннтow xHHHBir хихе ец •(чхэонаих.нAllгнн BBuodxXxa — °7 !иох — /) °7ı/ ***4 = di*** эоне a BXairaBioradu чиид хохrow BBdoxoM ‘(Bwaogo ххawre — др) ***Apsg*** j Д Bxjdaxe ввнхннjвw внаки -onadaoa Btfrraodu HdxXxg —) dxa °***g*** = ***g*** ([g^ j o ‘5) ‘dawnduBH ‘•wo) Аноиве ou хэвхАхве HHixjXirx ^мэндиеи o oirou эонхинхвуд

лишена недостатков обычно применяемой формулы (4 4). Подчеркнем, что по содержанию выражение (4.8) — закон Ампера и никакого дополнительного содержания не несет. По форме оно отличается от (4.3) или (4.4) заменой одной пары переменных другой при помощи линейных соотношений (4.5).

Сформулируем теперь постановку задачи о магнитной потенциальной яме следующим образом. Рассмотрим два (а не какое- либо другое число) идеально проводящих контура с замороженными потоками. Контуры недеформируемы и ориентированы гак, что магнитная сила удаленных контуров имеет характер притяжения. Эта ориентация контуров в дальнейшем не изменяется. Изменяется лишь расстояние x: с пренебрежимо малой скоростью контуры сближаются. Самое большое x_x и самое меньшее x_a расстояния между контурами удовлетворяют условию 0 < x_2 < л < оо. Важно подчеркнуть, что x_t может превышать размеры большего контура. Какое-либо искусственное воздействие на контур с током (например, разрушение идеальной проводимости и подключение контура к источнику тока) в процессе сближения не допускается.

При выполнении указанных условий ищется минимум потенциальной энергии магнитного взаимодействия токов U как функции расстояния x, изменяющегося на отрезке $(x_8$, л\). Иначе говоря, при выполнении указанных условий ищется нуль магнитной силы P на некотором отрезке 0 < x_2 < x_0 < Xj < оо и одновременно такое изменение магнитной силы, что при x — x_0 + Ax магнитная сила имеет характер притяжения, а при $x = x_c$ — Дх — характер отталкивания (Дх >0 — малое приращение расстояния x).

Заметим прежде всего, что (x) — монотонно убывающая функция x. Поэтому производная $dL\%/dx$ на отрезке $[x_2$, xj отрицательна и нигде не обращается в нуль Кроме того, произведение L_uLn всегда больше L^. Поэтому знаменатель в формуле (4.8) также нигде не обращается в нуль.

После сделанных замечаний из (4.8) легко находим два условия, при которых магнитная сила равна нулю:

$$— Y_2L_{ls}(x_0), \qquad (4.9)$$

$$(x_{,,}). \qquad (4.10)$$

Это — необходимые условия существования минимума магнитной энергии (нуль первой производной).

Заметим, что собственные и, как правило, взаимная индуктивности — положительные величины. Поэтому для выполнения условия (4.9) или (4.10) потоки Y, и т должны иметь один знак. Примем для определенности, что Y, и положительны.

Покажем, что одно из условий (4.9) или (4.10) может быть физически реализуемо. Учитывая, что собственная индуктивность каждого контура больше взаимной индуктивности, получим, что при V, < YJ физически реализуемо условие (4.9). Условие (4.10) при

этом не подходит (L_n > L,g ($x_в$)). Наоборот, если % < ?,, физически реализуемо лишь условие (4.10). Если У, = Ч*$_а$, ни одному из необходимых условий удовлетворить нельзя. Действительно, тогда должно быть $L_п$ = Ln (х), либо Ln = L_w (х,,). Это эквивалентно положению, когда контуры совпадают друг с другом, что не представляет физического интереса. Лишен смысла также случай, когда один из замороженных потоков равен нулю (существование ямы на бесконечном удалении контуров). Поэтому должно быть %, ?$_8$ $Ф$ о, V,$ф$?,.

Итак, тот факт, что взаимная индуктивность двух контуров всегда меньше их собственных индуктивностей, накладывает следующее ограничение на возможность существования ямы: замороженные магнитные потоки должны быть разными и оба отличаться от нуля. В этой связи интересно отметить, что в известной работе [57] рассмотрен случай одинаковых потоков, в [26, 80] — случай одного нулевого потока. Это объясняет, почему в известных работах магнитная потенциальная яма не получена.

Условие (4.9) или (4.10) означает, что ток одного контура в положении магнитной ямы равен нулю. В этом можно убедиться, подставив условие (4.9) в первую формулу (4.5), а условие (4.10) — во вторую. Тогда из (4.5) следует, что, если, например, = 0, поток равен Lis (х0 /2- т. е. является потоком взаимной индукции контура с замороженным потоком ?$_г$ > ?$_г$ Наоборот, если /$_8$ = 0, поток Ч$_8$ равен потоку взаимной индукции контура с замороженным потоком > ?$_8$.

Покажем теперь, что одно из условий (4.9) или (4.10) не только необходимо, но и достаточно. Пусть для определенности < ?$_8$ и выполняется необходимое условие (4.9). Используя (4.8), найдем производную магнитной силы по x и вычислим ее в положении $x = x_0$. При вычислении производной правую часть выражения (4.8) удобно рассматривать как произведение и сразу учитывать условие (4.9). Тогда все слагаемые производной произведения равны нулю, за исключением производной члена 4^{р}$_t$$L_{Si}$ — ?$_в$$L_{IS}$ (х). Поэтому

$$a^* - L \qquad {}^{r*}{}_7 L£L£=$$

$$(Lu\,(x)]^*)^* \left[- \right. \qquad 14.111$$

Как уже отмечалось, производная взаимной индуктивности по расстоянию и знаменатель (4.11) нигде не обращаются в нуль. Знак выражения (4.11) может быть установлен следующим образом. При выполнении условия (4.9) и неравенств ?i < ?$_8$, Lu > As (^{x}о) числитель дроби в правой части (4.11) положителен. Замороженный поток ?$_s$ и остальные члены (4.11) также положительны. Значит, $dP_t dx\backslash x=xi<.$ о. Если бы?, был отрицательным, это не повлияло бы на знак dP/dx !*=*,, так как числитель дроби в правой части (4.11) тоже был бы отрицательным. Таким образом, производная магнитной силы по расстоянию в положении, где выполняется необходимое условие (4.9), отрицательна. Если бы вместо (4 9) выполнялось

условие (4.10), производна» магнитной силы, как нетрудно показать, также была бы отрицательной.

Отрицательный знак правой части (4.11) означает, что вторая производная магнитной потенциальной энергии U в положении, где выполняется необходимое условие минимума, положительна. Тем самым достаточность одного из условий (4.9) или (4.10) для минимума U доказана ®.

§ 4. 3. Доказательство, использующее теорию [81]

Если в энергии магнитного поля $2W = / _1 T_{\cdot_1} + 1P$ вместо токов $/_н$ l_t подставить правые части формул (4.6), энергия поля окажется выраженной через T\, и механические координаты (функцией механических координат есть $£_{18}$):

$$W - \text{-i-} (\text{W‡?} — \qquad + L_U V|)\ (L_u Ln - Lh\sim' \text{-} \quad (4.12)$$

В этой формуле замороженные токи $Ч_п$ $Ч_а$ должны рассматриваться как некоторые постоянные. Значения этих постоянных с формальной точки зрения могут быть любыми, однако в действительности они ограничены сверху критическим полем, разрушающим сверхпроводимость.

Известно [81, гл. 1], что энергия магнитного поля, выраженная через потоки и координаты, является потенциальной энергией. Поэтому магнитная сила P определится как частная производная энергии (4.12) по механической координате x, взятая с обратным знаком:

$$\text{Р} — \quad _ вк _ \quad = \quad \{Loa\ ? + £ц — V\text{-}uLn + \text{LJJ}) \quad = \quad (4И>$$

Числитель первого множителя в этой формуле может быть равен нулю, т. е.

$$\text{V,'*,} \qquad + LL)\text{-} <.L,, Wt + (.Л L,, \text{ - } 0, \qquad (4.14)$$

если только

$$\text{L, - Z1V.FT' „ли L„ - «Г.} \qquad (4.15)$$

Возьмем вторую производную энергии (4.12) по координате x в точках (4.15). Для этого необходимо продифференцировать (4.13) по x один раз и подставить значения $£_н$, выраженные через постоянные $£_п$. £„, Ч\, $Ч_а$ согласно (4.15).

---

‡ Магнитная потенциальная яма была обнаружена автором в феврале 1975 г.

Выполняя диф^ренцирование, получаем

$$d^*W\ d^*W\ (\ dL_{it}\ У\ ,\ dW\ d\hat{}Li,\ \partial x^{\ e}\ \backslash\ \partial x\ )\ +\ \mathbf{ax^*} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Второе слагаемое в этом выражении равно нулю в силу того, что в точках (4.15) dW/dL_{lt} **= 0. Член** $(dL\hat{}dx?$ **— положительная величина (случай** $dL\hat{}dx$ **— 0 будет рассмотрен ниже). Поэтому знак** d^tW/dx^i **определяется знаком второй**

— *12 **(4-17)**

производной функции W **по** L_{It}**, т. е. функции, явный вид которой дается формулой (4.12). Из этой формулы следует т. е. вторая производная потенциальной энергии по х в точках (4.15) положительна (LuL« >** L***2, Li > 0). Это значит, что выполнены достаточные условия минимума** U**. Этот результат впервые опубликован в работе [35]. Подчеркнем, что он справедлив в том случае, когда** $dLJdx\ \Phi$ **0. Если бы это было не так, необходимое условие существования минимума (равенство нулю магнитной силы) выполнялось бы, но достаточное — нет.**

Пусть теперь $dLJdx$ **= 0. Представим потенциальную энергию как сложную функцию координаты** U **—** V **(*)) и запишем ее производные до четвертого порядка включительно:**

$$\partial x \sim M_{\text{ц}}\ \partial x\ '$$

$$\underline{\&Q\ Ц}\ f\ LL\text{-}_{\text{ц}}\ ?\ \underline{Д\ fL.}$$
$$_{в} \qquad \backslash\ \partial x\ )\ ddL\ Да\ '$$

$$PU \quad \&U \quad (\ dL\hat{}\backslash^*,\ o\ \&\ \&L_{it} \quad dl_{it} \quad ,\ dU \quad \&L_{tl}$$

$$тг\text{-}\hat{}тТ/\ г\sim a2\ хx^{v}+\ L\hat{}\ \boldsymbol{x»}\ \bullet\ \textbf{(4.18)}\ jw\ _\ x_U\ i\ XLu\backslash^*.\ в\ XLi\ (\ dLs\ \backslash 8$$

$$\sim\partial^* \qquad {}^{dL}v\ Г\ Э\ 1\ +\ fL_n\ toX\hat{}\ \backslash\ ь\ +$$

$$+4\ \frac{\partial^4 U}{\partial L_{12}^3}\ \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x^2}\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x}\ +3\ \frac{\partial^4 U}{\partial L_{12}^3}\left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial L_{12}}\ \frac{\partial^4 L_{12}}{\partial x^4}\ +$$

Из этих формул и условия $dLu/\partial x \sim$ **0 следует, что в точке с** $dUldLu$ **— о все производные энергии равны нулю, кроме**

$$3\ \frac{\partial^4 U}{\partial L_{12}^3}\left(\ \blacksquare \qquad \textbf{(4 19)}\right.$$

Как было показано выше, член d^*U/dLn **в точке с 5£//dLi2= 0 положителен. Тогда из (4.18) следует положительность дифференциала четвертого порядка d*v, если в точке равновесия** $d^2L_i'_i!dx^i\ \Phi\ \Phi$ **0.**

Таким образом, случай $dLjdx$ = o **разрушает механизм возникновения магнитной потенциальной ямы членами второго порядка малости Но этот механизм начинает проявляться в дифференциале четвертого порядка при условии, если вторая производная взаимной индуктивности по координате отлична от нуля. Можно показать, что повышение порядка ненулевой производной взаимной индуктивности по координате, независимо от того, четная она или нечетная, приводит к** *четному* **ненулевому диф^ренциалу потенциальной энергии, т. е. к минимуму В этом можно убедиться иэ (4.18), продолжая вычисление производных более высоких порядков.**

§4. 4. Частный пример соосных колец

Если x — **расстояние между двумя соосными идеально проводящими кольцами радиусом** a_t **и толщиной** d **(i =** 1, 2**), то, использовав полученные выше результаты, найдем**

$$u — 2ULMW - (Л* + 1 - 2rw)\,(1 - y''T', \qquad (4.20)$$

$$p - A'aL.vT=(m - y)\,(ЛУ - O\,(1 \quad x$$

$$X № - A^*\,(1 + OT^{57,}\,|2^{*''}K\,(к) - (2 - A^{1})\,E\,(41. \qquad (4.21)$$

$$c - lOCa^L^W^{1} = (л - y)\,(ЛУ - 1)\,(1 — (Л-' ***' ' x$$

$$X\,(1(1 + B^*(2\text{-}4)\text{-}4E|^*\,K\,(Л) — |2(Л^* — f\text{-}I\text{-}\,1)\,(1\,.B''$$

$$\text{- }4£\,(1 + A»)]\,E\,(*)[+ |(1 - ф)\,(л^* - \quad + 1) + 4y\,(л — y)\,X$$

$$X\,(ЛУ - 1)1\,(1 - ("Г^{3}\,14^* — *=(■+ E)^*1 \quad №''K\,(A) -$$

$$— (2 — A>)\,£\,(*))•. \qquad (4.22)$$

Здесь u, p **и** c — **соответственно безразмерная магнитная энергия, сила и жесткость (**V, P, C — **размерная энергия, сила и жесткость); У(— замороженный поток т-го кольца (» — 1,2); ц — ЧуРГ х X** $(LML_{II}^{1})^{,7}$**'; У — Ll2 (£ttLM)~»'; l — щаТ K (A) и** E **(A) — полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля А — 2х X (оо)*' le + <*s)* + •*Г'\ A' — (1 — A*)'7* — дополнительный модуль;** L, $(i$ — 1,2**) и Lu — собственные и взаимная индуктивность, вычисляемые по формулам**

$$Li — pa\,(In\ 8тГ' 4- \qquad I — 1, 2; \qquad (4.23)$$

$$L, — y.\,[(4 - A)\,K\,(A) - -J\text{-}E\,(*)] \qquad (4.24)$$

(1 — **лондоновская глубина проникновения, см. §4.1). Эти выражения упрощаются для малых и больших А (соответственно случай удаленных и близкорасположенных колец). При малых А**

Ж*) = -=(i + -т- + -^k* + 0(^. E(k)~

У = ^{k} + *o*$^{(f5)}$, * = ir[(,^{n}v + ^)(^{1n}^ + lf)] ^{1}

(Л — 40 0W— ,) О — У*) ^{2} **= = (Л* + I) 1—** *n + У — 4uf + + 2if — 5ny + 3yf— Inf 4*

+ О (y')|,

Id—jflfo—2»***w** + **0** + *4yx* **x (n — У)**

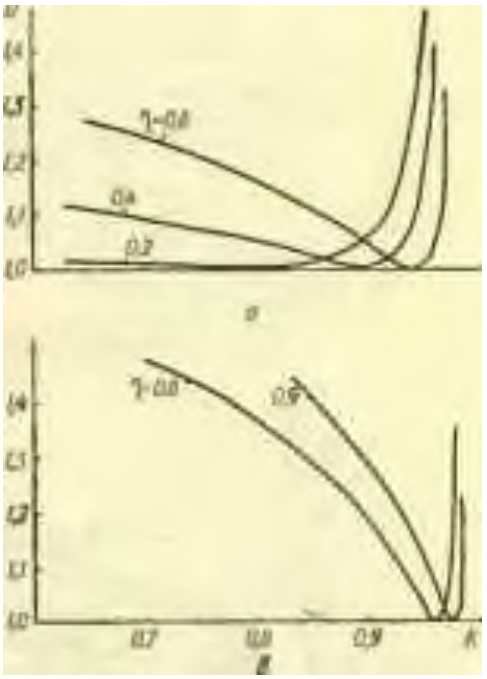
***(rw* —1)1 О — *y"Г*^{3} =**

= (Г + 1) [1 — *6ny* **4-** 6y$_{2}$ **—**

— *20nf* + 15г* — 42ft//^{6} +

+ 27#* **+ *О (y*^{7}*)1*, *n* = и (J +**

+ I)"',



что дает

/* = -|- «И Ю* + ı)(« + «Л —**

— ой^{2}) |-О (й^{в}), **(4.25)**

с = -J- (1 +Е)^Й^{3} [(А, + А$_{г}$- 1) (1 — *an-*

'k)* **+**

+ 4<A|-^{A}. + l)*a + o **(k-)J.** **(4.26)**

где

A>= ^**((-|1Г'2.** A$_{a}$ = (1-J)(1 + **(4.27)**

При больших k удобно воспользоваться другим представлением полных эллиптических интегралов [19, с. 919, 9201: *К* **(k) = 1n -J- + "V" (**^{ln} *-Р* ^{1} 1 + **йТг*' 1**$^{.n}$ *Т*---------- **9) + ----------••**

Е (й) = 1+ -ГУ-(1п -***Р*** ------- Т*) + $^{k>'}$ (^{to}Т---------- И") + • • •

и разложить левую часть (4.20) — (4.22) в ряд по *у* **в точке** *у = ц* **(положение магнитной потенциальной ямы):**

(Л — #) (ПХ/ — П И *—1)^* - $_{1}^{1}$ **4- an,** + **e^{2}n$_{a}$ 4- О (e»)).**

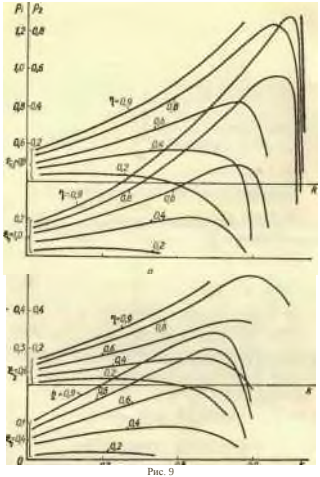


Рис. 9

Г 1 + ч'

"1 = **n* = '{1-^V » ^{8} = ʏ_т1-**

1(1- #2 (if — 2*ц* + 1) +4((1] - *y) (ц* - 1)1 (1 - *уГ* =

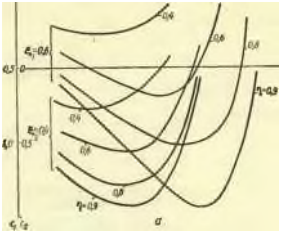
~{[J,)»)$ Ии + ' — **1'** + *ег$_{а}$* + *e^{и}n$_{t}$* + **O (e^{a})],**

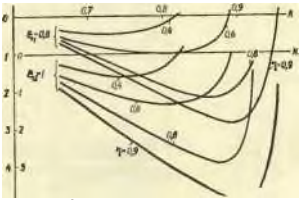
Я ^{и} . л **1 + 6ч^{и}** **1 -Т Ч* . л_ П + 13ч^{и}**

- 2п К |—р ' *» ' -т> + 4л б-п¥

Тогда

и = **[1** + *еп$_{ь}$* + *0* **(e^{a})J.** =—р' **(4-28)**





0Q 6

Рис. 10

Г- -nhr № -*(! + ЭТ- [l + » + «'-*4*^ +

+ *0* **(e")][^ +r(^{1ш'Р^ -1)+ 4"^\'(1Т^{ш}Т---------- 1г) +**

+ *0 (k^{l}* **In** -£-)]. **(4 29)**

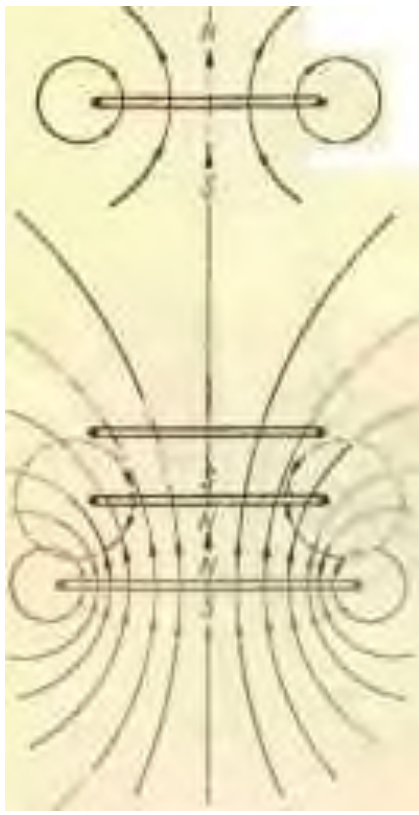
С e (*J*-^r **П {(1 - Л) 11 + «И + Лц +** *О* **(«3)1 [** +

$$+ o(*M|n\ -p-)| + (Д — *2)11 + 41) — Ч + «л,+e^{r}п_{<} +$$

$$+ O(e^{3})| | — + 5\ In\ \text{----------}1 + k'(\text{------}\ ';—\text{-----}g\text{-}\ In\ 1Г +$$

$$+ 4\ ln^{s}\ \text{-}£\text{-}) + O\ (Л''\ In\ тJ\text{-})]\} \bullet \qquad (4\ 30)$$

Графики безразмерной магнитной энергии, силы и жесткости в частном случае In 8тГ' + AVT ² = 1 (t — 1, 2) показаны на рис. 8—10. Они вычислены как функции k по точным формулам (4.20) — (4.22) для нескольких значений безразмерных параметров' £ и ц. Точке минимума магнитной энергии (y = = г]) отвечает нуль магнитной силы и соответствующее изменение знака по обе стороны от этой точки.



Взаимодействие с минимумом магнитной энергии обязательно влечет за собой существование еще одной характерной точки — точки максимума магнитной силы притяжения или точки нулевой жесткости (см. рис. 9 и Ю). Существование максимума силы следует из того, что при малом удалении от положения ямы притяжение возрастает, а при большом удале> нии сила притяжения убывает по закону® const R~*.

Представляет интерес наглядное объяснение существования магнитной потенциальной ямы на основе свойства постоянства полного магнитного потока. Условно будем считать, что

Рис. и

полные магнитные потоки колец на рис. П равны числу силовых линий, пронизывающих плоскость кольца. Так, в меньшем кольце V, = = 5 = const, в нижнем Ч*,= 13. Полярность магнитных полюсов N и S будем определять по принципу: из N силовые линии выходят, в S заходят. В верхнем положении кольца обращены друг к другу разноименными полюсами. Поэтому они магнитно притягиваются. Если меньшее кольцо займет нижнее положение, его будут пронизывать

' Расчеты выполнены И. В. Кобржиикой.

На том основании, что любая система удаленных токов эквивалентна магнитным диполям (см., например, [44, с. 140—141]).

семь силовых линий магнитного поля нижнего кольца. Но в силу свойства Ч — const должно быть Ч, = 5. Поэтому в меньшем кольце самопроизвольно наведется такой ток, чтобы создать магнитное поле, две силовые линии которого будут направлены обратно семи линиям поля нижнего кольца Тогда Ч] = 7 — 2 = 5 Магнитная полярность меньшего кольца за счет изменения направления тока изменится. Вместо притяжения кольца будут отталкиваться как магниты, обращенные друг к другу одноименными полюсами. В некотором среднем положении ток в меньшем кольце будет равен нулю (все пять силовых линий будут создаваться полем нижнего кольца). Поэтому магнитная сила будет равна нулю. Таким образом, получена магнитная потенциальная яма: при сближении колец магнитное притяжение, проходя через нуль, «превратилось» в маг нитное отталкивание.

§ 4. 5. Некоторые обобщения

Когда имеется не одна координата или не два, а несколько контуров, исследование магнитного взаимодействия усложняется.

Пусть контур обладает n **степенями свободы движения. Условия минимума можно трактовать как связь между координатами, обеспечивающую постоянство взаимной индуктивности. Для** $n = 1$ **существует точка (положение), для** $n = 2$ **— линия (связь между двумя координатами), на которой магнитная энергия минимальна. Для трех координат вместо линии имеем поверхность и т. д.**

Конкретные примеры двух идеально проводящих колец радиусами $в]$, $(ц$ **дают следующее. Если оси колец пересекаются в центре меньшего из них (рис. 12, о) и взаимная индуктивность**

может быть представлена разложением в ряд по многочленам Ле жандра $P_{ц_{n+1}}$ **(cosO) [28, с. 169]. Главный член этого разложения в наших обозначениях с учетом (4.9) будет иметь вид**

$$I'M = -f- \qquad \cos O = 4_1 47^I Z\text{-}м = \text{const}, \quad (4.31)$$

где предположено, что $Ч_2 > Ч_Р$ **Тогда уравнение линий, на которых магнитная энергия минимальна, имеет вид cos Ф = = const (рис. 12,** $a)$**, где значения постоянной определяются отношением замороженных потоков.**

Для двух соосных колец на рис. 12, б с тремя независимыми смещениями меньшего кольца x, y, z **может быть использована формула [28, с. 1671§**

$$I _____ \text{“}\Gamma V. \qquad (2\text{«} +1>1 \qquad (P^* + \text{«•>'} ..$$

---

§ **Предполагается, что (р- -+ а*)$^{v'}$ <** $в$**, — а***

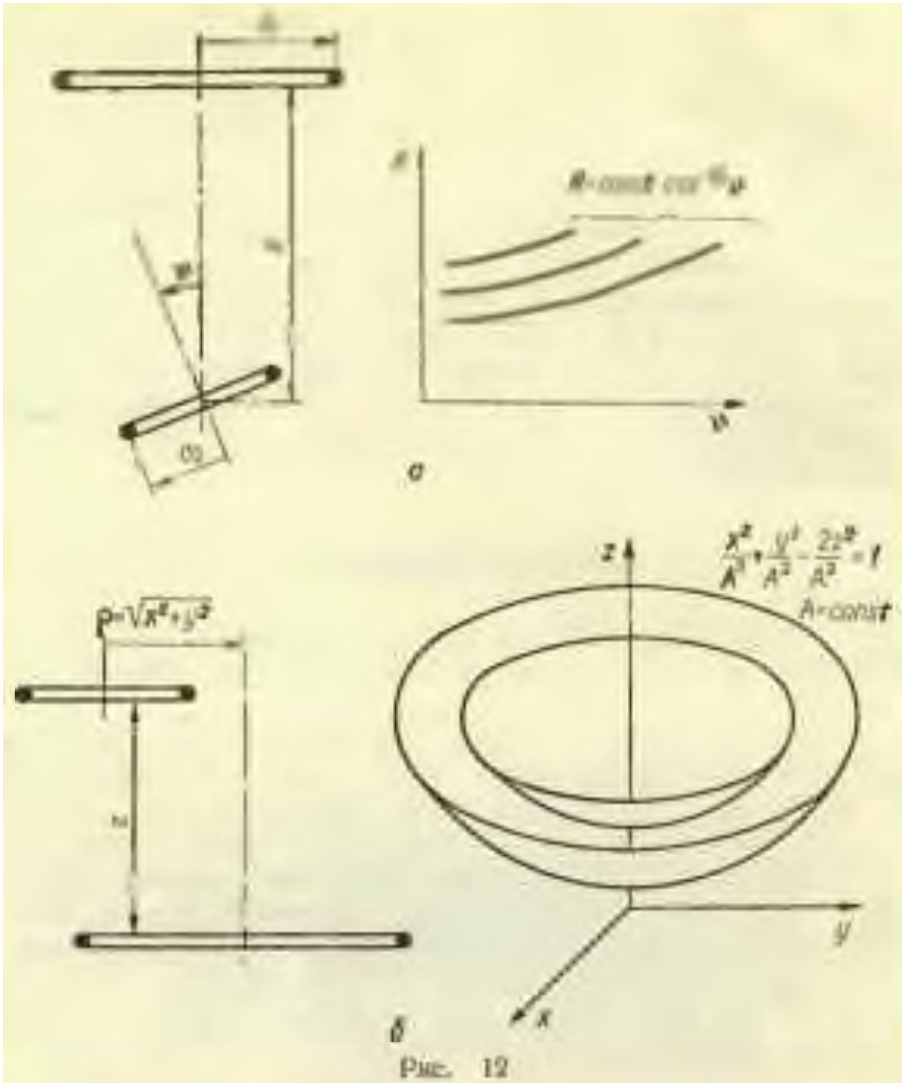


Рис. 12

f y » я42, f) *Pin* (cos 0)’

cos d = z (p2 -f z8)-"',

Считая расстояние между центрами колен намного меньшим радиу-

а»

са большего кольца и ограничиваясь членами ряда порядка — получаем

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2}-\frac{z^2}{\frac{1}{2}A^2}=-1,\quad A=\frac{1}{\sqrt{3(1-C)}},\quad C=\frac{2\Psi_1 L_{12}\omega_1^2}{m_1\omega_2^2}$$

o <*C*< **1**

Это — уравнение двухполостных гиперболоидов с осью вращения *г* **(рис.** 12**,** *б).*

Для контура с тремя независимыми линейными координатами представляет интерес минимум магнитной энергии как функции трех координат (трехмерная магнитная яма). Разложение в ряд Тейлора магнитной энергии (4.12) в положении (4.15) будет иметь вид (произвольную постоянную опускаем)

Производная $oL_{la}|dx^*|_o$ **численно равна магнитной силе единичных токов двух заданных контуров в положении (4.15). Минимум члена ми второго порядка малости достигается тогда, когда эта производная по всем трем** x_t **не равна нулю. Если учесть, что произвольная система сил эквивалентна одной силе (главный вектор) и одной паре (см , например, [1, с. 39,1^71), то по крайней мере в двух направлениях, перпендикулярных главному вектору, производная взаимной индуктивности равна нулю. Отсюда следует теорема.**

Теорема 4.1. В магнитно взаимодействующей системе о одним подвижным идеально проводящим контуром существуют такие три взаимно перпендикулярные линейные смещения, что минимум энергии магнитного взаимодействия как функции этих трех линейных смещений не может быть достигнут членами второго порядка малости независимо от формы контура.

Эта теорема эквивалентна утверждению о существовании двух нулевых и одной отличной от нуля производной взаимной индуктивности двух контуров как функции трех взаимно перпендикулярных линейных смещений.

Если имеется не один подвижный контур, а три жестко соеди ценных гальванически не связанных контура, минимум магнитной энергии может иметь место Для упрощения доказательства этого утверждения предположим, что контуры плоские, плоскости контуров на подвижном теле взаимно перпендикулярны, а замороженные потоки двух добавленных контуров равны нулю. Магнитная потенциальная энергия будет найдена, если связи между магнитными переменными

$$\Gamma. = L_{,}/, +0 - /_8 + 0 - Z_s + 7_{,и}/^*,$$
$$o = {}^{o-}/{}'4- L_j/g + o \bullet /_8 + {}^/{}^ \quad \text{ф}$$
$$0 = 0 \bullet 7, + 0 \blacksquare 1, + Ms + LJ^*$$
$$W = \quad + L_M/g + L_{,,}/_8 + L_47,$$

разрешить относительно токов и подставить полученные решения в формулу энергии магнитного поля[**]**:** $2W = /_{,}4^f, + l,V. + l_tW_B + + /Д^* = AT, + /Д^*$**- Тогда получим**

$$u = W = -1\ |V|\ IL,L,L. - L..LU - L,Ll.) - UV,U,L,L,L_u +$$
$$\pm \qquad (L_IL,Z,Z., — LJ.JL, — L,L,LL — LJ.AF' \quad \textbf{(4.33)}$$

---

[u] **В (4.32) учтено, что еамороженные потоки контуров 2,** ***3*** **и взаимные индуктивности контуров** ***1, 2, 3,*** **принадлежащих одному телу, равны нулю.**

Временно будем рассматривать U **как функцию трех независимых переменных** L_u, L_M **В точке**

Li* = L.V, ЧТ⁴, L_M **= !« = 0 (4.34) все первые производные и вторые смешанные производные энергии**
(4.33) равны нулю. Остальные вторые производные, равные

$$\backslash \underline{Ч\,i}\, f\, \&u \backslash JL$$

«МГА " $L\ LL^* \sim LH'$,

положительны (L_B, $L^\wedge$, **L< > 0; L, I* > £?<). Поэтому в точке (4.34) выполнены ненбходимые и достаточные усуювия минимума энергии (4.33) как функции трех взаимных индуктивностей** L_u, **L«, !«•**

Пусть три взаимно перпендикулярные линейные смещения л., $x_г$ **таковы, что все первые производные взаимных индуктивностей, вычисленные в точке (4.34), равны нулю, за исключением**

$$\left(\frac{\partial W_M'}{\partial L_{ga}^2}\right)_0 = \frac{\Psi_4^2}{L_4 L_4^2}$$

m- т- $ш,$**-**

Тогда простым вычислением можно показать, что в положении (4.34) выпылояются я енбоодимые и дсдоаточные есловия яущесевсв вания минимума магнитной энергии как функции $x_и$ $x_г$, $л_а$.

Для каких-либо других взаимно перпендикулярных смещений $x[$, ***2, *з также имеет место минимум энергии (4.33) как функции переменных** $x[, x2, Xз.$ **Это вытекает из (4.35) и очевидного следствия теоремы 4.1: не существует такой линейной координоты** x_t, **чтобы первая производная по** $x_($ **хотя бы одной из трех взаимных индуктивностей трех жестко связанных взаимно перпендикулярных контуров ровнялась нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.**

Теорема 4Л. В магнитно взаимодействующей системе имеет место минимум потенциальной энергии магнитного взаимодействия как функции трех линейных смещений системы трех взаимно перпендикулярных гальванически не связанных идеально проводящих контуров, если полный магнитный поток хотя бы одного идеально проводящего контура отличен от нуля.

Таким образом, добавлением двух контуров, обладающих идеальной проводимостью и перпендикулярных исходному, можно добиться «трехмерной» магнитной потенциальной ямы. Примером подобного рода является система трех взаимно перпендикулярных сверхпроводящих колец с общим центром, кок одного свободного тела, и неподвижного сверхпроводящего кольца, кок другого тело. В положении, когда какое-либо кольцо свободного тело соосно не-подвижному кольцу, отношение замороженных потоков соосных

колец равно отношению их взаимной индуктивности к собственной, при нулевых замороженных потоках двух остальных колец имеет место минимум магнитной энергии по отношению к трем линейным смещениям системы трех колец.

Представляет интерес вопрос существования минимума магнит ной энергии в системе *n* контуров, способных независимо перемещаться относительно друг друга. В частном случае ненулевой первой производной каждой взаимной индуктивности по каждому независимому перемещению этот вопрос сводится к задаче отыскания минимума энергии поля

$$2\mathrm{T} - \qquad /=1 \ldots\ldots\ldots\ldots n)$$

как функции *(n* — 1) независимых переменных $L_{lt}(i = 1,$ $, n\backslash$ *i ф. /*). Решением этой задачи являются равенства

$$4^{\wedge} - -^{\wedge L} \text{« I} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{"}\blacksquare \qquad \text{<4 36)}$$

Необходимость условий (4.36) следует из того, что в положении (4.36) токи всех контуров, за исключением одного, равны нулю. Поэтому равны нулю и магнитные силы любых двух контуров (они пропорциональны произведению токов этих контуров). Достаточность условий (4.36) выполняется в связи с тем, что смещение каждого контура с нулевым током в положении (4.36) при неподвижных остальных контурах с нулевым током в положении (4.36) аналогично поведению системы двух магнитно взаимодействующих контуров (см. §4.2 и 4.3).

Рассмотренные выше случаи подтверждают сказанное в начале этого параграфа утверждение о сложности изучения магнитного взаимодействия произвольной системы контуров. Дальнейшие результаты могут быть получены конкретизацией геометрической формы контуров.

Глава 6
СВОБОДНЫЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИЕ ТОКОВЫЕ КОЛЬЦА

§ 5. 1. Энергия *n* свободных колец

Частным случаем контура конкретной формы является окружность. Получим формулу магйитной энергии как функцию координат произвольной системы свободных идеально проводящих колец. В качестве координат каждого кольца как твердого тела выбраны цилиндрические координаты центров масс колец в неподвижной системе отсчета C£i) и углы Эйлера, определяющие ориентацию колец относительно системы (рис. 13).

Расположим в центре масс *О,* какого-либо кольца начала двух трехгранников ОДсл/«&о и 0Л'1(£о причем оси трехгранников

ОЛюПкХю и *ОЛыЧгОСго все* время остаются параллельными соответствующим осям трехгранника ООД (о,£i$_e$. О$_t$j II о| и т. д.), а оси трехгранников жестко связаны со свободными телами таким образом, чтобы совпали с осями динамической симметрии тела. Ось 0,£, является магнитной осью кольца. На рис. 13 изображены также орты 7$_{lt}$ (8 трехгранников о|Г)С, О&Чя&о и орты t_K, »«, i_u, направленные по осям трехгранников Ориентацию ***1***-го

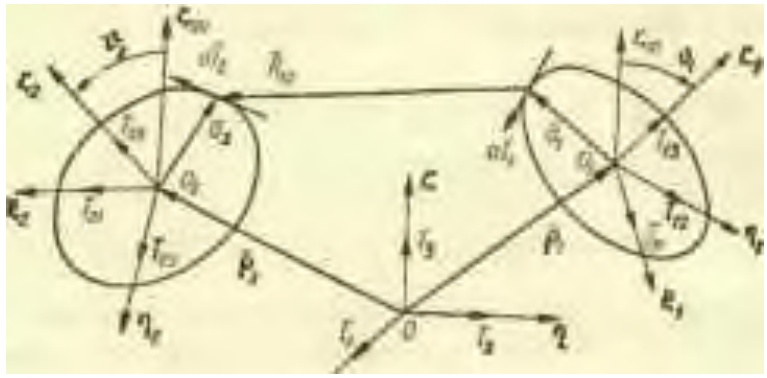


Рис. 13

тела относительно трехгранника о&]!£ (или же о(Ьс%£,$_0$) будем определять углами Эйлера ft,, ф,, ф,, где — угол нутации (между осями *О&ю* и о,£,); ф, — угол прецессии (между осью О,&о и линией узлов о;Р<); ф/ — угол чистого, или собственного вращения (между линией узлов 0,Р, и осью 0£). Радиус-вектор *R* центра масс i-го тела О, будем определять цилиндрическими координатами р$_г$, а,, £ точки О, в системе координат о£т)£ (р, — радиус; сс$_x$ — угол; £ — аппликата).

Через выбранные координаты необходимо выразить магнитную энергию. Будем исходить из формулы взаимной индуктивности (4.2) и выразим сначала через степени свободы взаимную индуктивность. С этой целью запишем выражения

$$Rt = \text{pi cos a('j + p, sin a<iz +}$$

$$a_t = \text{a, (cos } (p/iu + \text{sin <p}_2\text{e}). \qquad (5.\ 1)$$

$$dh — at \text{ (sin ф}Дн — \text{cos ф,«и) } dcpi,\ 1=1, 2,$$

и векторное равенство 7?, = о, — *а,* + *R,* — *R,,* что следует из рис. 13. Тогда, воспользовавшись таблицей направляющих косинусов (3.14), после преобразований получим

$$L,, = a,a, \text{ J } dtp, \text{ J [cos } 2ф, \text{ cos } 2ф, \text{ sin б, sin fl, +}$$

$$\text{+ (cos } 2ф(\text{ sin } 2ф, \text{ cos ft, — sin } 2ф, \text{ cos } 2ф, \text{ cos ft,) cos (ф — ф,)| x}$$

$$\text{X (pf + p* + of + } a2 — 2\text{p«p, cos (a, — a,) + (£ - £)* +}$$

— 2p & -cos 2 ф/ cos (Яр — a,) — cos d, sin 2 *q*. sin (Яр — a,)] — 2p,a, I—

cos 2ф, cos (*ф — a,) + cos d, sin 2ф, sin (%—a,)] 4

4- 2p/a, [— cos 2ф, cos (% — a,) + cos d, sin 2ф, sin (Яр—a,)] +

+ 2p(-a_z [cos 2ф, cos (Яр—a,) — cos d, sin 2 ф, sin (Яр — a,)] 4-

-f 2a(a,](— cos 2ф, cos 2ф,—sin 2 ф sin 2 ф, cos d, cos d,) cos (Яр—Яр) +

-f (sin 2ф, cos 2ф, cos d,—cos 2ф, sin 2ф, cos d,) sin (Яр—Яр) —

— sin 2ф, sin 2ф, sin d, sin d,| + 2 (£ — £/) (a, sin 2ф, sin d, —

— a,sin 2ф, sin o/)|}~»/'^ф< (*, / = I» ^{n})- (5-2)

Выразив взаимные индуктивности L„ через степени свободы, воспользуемся известными формулами энергии магнитного поля

$$* = yir.l, \qquad (5.3)$$

и связей между магнитными переменными в системе *n* контуров с током

$$V, - г— Ш, (i = 1..... п). \qquad (5.4)$$

Тогда потенциальной энергией магнитного взаимодействия бу* дет выражение (5.3), где вместо А должны быть подставлены решения системы уравнений (5.4) относительно токов, а вместо взаимных индуктивностей — правые части формулы (5.2).

Решение системы (5.4) для произвольного *n* в явном виде получить невозможно. Если *n* — 2 (два свободных тела), магнитной потенциальной энергией будет

$$U - 4- \quad - ^T.T. + \quad (L_U L_{„} - Q^{-1}, \qquad (5.5)$$

где Ls определяется по (5.2) с заменой индекса *i* на 1, а / на 2. Этой же формулой следует пользоваться и для свободного магнитного маятника — динамически симметричного тела, центр масс которого смещен по оси токового кольца на величину /. Если маятник находится в магнитном поле неподвижного кольца (рис. 14), изменится лишь формула для £и. Поступая аналогично изложенному выше и используя векторное равенство $Я_и$ = a, — a, - p -- *I* (см. рис. 14). для взаимной индуктивности получаем

2л 2л

$$L_{12} = \frac{}{} \int d\lambda \int (\cos\lambda' \cos 2\lambda_1 \cos\theta + \sin\lambda' \sin 2\lambda_1) \times$$

X (p^a + *V* + *P* - 2a* (1 — cos *X* cos 2Я — sin *X* sin 2Я, cos d) 4* + 2ap [cos 2*X* cos (a — Я0 + sin 2Я, sin (a—яр cos d— cos (*X* +

4- if — a)] +- 2a£ sin 2A, sin ft — 2al sin % sin o + 2p/ sin (a —

— ip) sin o — 2£ cos fl}-1'* (- Я,). (5.6)

где с — радиус колец; р, а, £, о, р, <> — координаты маятника.

Представление магнитной энергии через магнитные потоки и

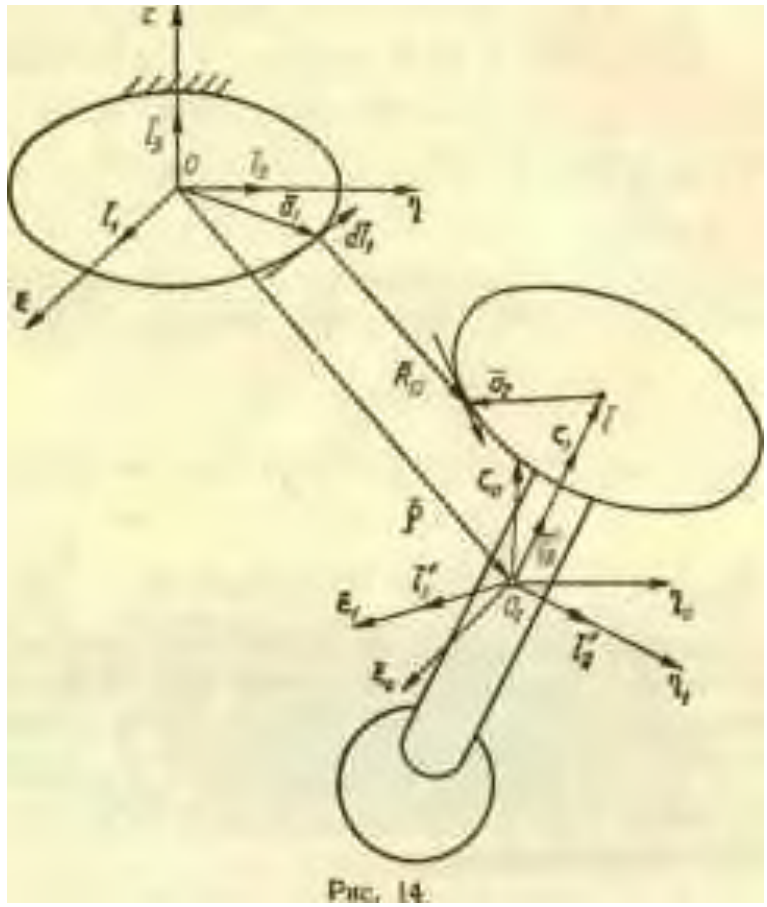


Рис. 14

координаты возможно для трех тел. Из (5.4) и (5.3) для $n = 3$ получим

U = Ъг 14? (Уа - &) + л? ('Л - <) + (/Л - /?2 +

+ 2%% — Ум) + 2%% (/[2^23 Ум) +

+ 2* (Ув - Шз)! (Шз + - hts - У?3 - /Л)-*,

T-W"1, lv = L,LL\ l* = L^.L—

где введены безразмерные параметры, равные отношению соответствующего размерного параметра к характерной величине такой же размерности. В качестве последних взяты Т (характерный магнитный поток) и L (характерная индуктивность).

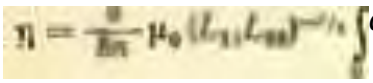
Для четырех контуров выражение для V будет еще более громоздким. Частный случай энергии трех контуров с двумя нулевыми

потоками в магнитном поле четвертого контура был получен выше (см. § 4.5, формула (4.33)).

В связи со сложностью зависимости U от взаимных индуктивное тей, а взаимных индуктивностей от координат целесообразно упростить найденные формулы разложением в ряд Тейлора вблизи некоторых заданных положений колец. Ниже будет рассмотрено положение соосности колец.

$ 5. 2. Взаимная индуктивность и энергия вблизи положения соосности двух колец

Исходя из формулы (5.2), запишем относительную взаимную индуктивность двух токовых колец радиусов a_u a, в виде 4л 2л



$dk\,j$ **(cos Л' cos Я cos ft 4- sin Я' sin Я) X X [a? + ai + p⁸ + C** — 2a,<^ **(cos Л' cos Л, + sin Л' sin Я cos ft) 4-**

+ $2a\phi$ **(cos Я cos 6 + sin Я sin S cos ft) — 2agp cos (Л'** — 6**) 4-**

-f XC sin Я sin ft)-*'»4Я (Л' = 2Л, 8 **= ф — a, a*** = $a_L a_s$). **(5.7)**

Положению соосности отвечает набор координат

$$C = Ъ, \Phi O,\ \text{р} = 0,\ \text{ft} = O,\ \text{б} \text{ — любое.} \qquad (5.8)$$

В (5.8) вместо р = 0 и С =(0 Φ **0 можно взять р = р₄** Φ **0, С = =⁰, 4=|.**

Дифференцируя под знаком интеграла (5.7), вычисляя производные в точке (5.8) и используя свойства эллиптических интегралов, получаем

$$\text{j} = -\quad \text{Ро U-ц^м)} \quad \text{Со £}\ dJi\ \text{j cos ф (о -f cl -f Со —}$$

$$\text{— 2}a_L a_t\ \text{cos ф)“*'*}\ dKy = \text{JJ --------}\ \sim f\ \text{(ЯЛ-Ц ' X (5.9)}$$

$$x\text{-}J.\text{rikrt-^-A}^{1\text{’}})\text{^, ф = 2(Л —Я)> /?* = }(a + \text{a,})^2 + \&$$

$$\text{a}^2 = \text{a}_t\text{a}_(.$$

где K **(**k**),** E **(A) — полные эллиптические интегралы модуля** k**, а индекс** о **означает, что производные вычислены в точке (**5.8**).**

Опуская громоздкие выкладки, выпишем значения вторых ненулевых производных взаимной индуктивности, вычисленные в

положении соосности колец*[1]:

тг “Г7^'' ц. №.. W7- W[(I + *2) £ - *2 к -

------ г (4 + (вАГ’ [f'z(2 — 6® (£ — Л) + Л (1 + &) £]) ,
+ 4- <п, + о,)[1] (О,»)-' |*‘ (2 - 6® (£ - /0 + *' (1 + А) £]} ,
(т?^),- Т “Г''-
(-яГ)(- 4- ol'W'Но «•иЦ.Т'Л ** ’ (б''£ —

<Г'Ч $Ш_аГ^{n1}$ - *•»|б"К — (' + 62) E +

— 4 [2(' — 6’ + **) £ — (2 — 3*“ + **) /Cl) . (Мо)

(<S-),= ''^ * 'IMW-w)’''7'»**'''4 X
X {(8 — *66® + $7k$* + *•) K — (8 — 12*® 4- 26'') £ —

— <r_xГ’,*! [2 (1 — 6’ + 6<) £ — (2 — 31® + **) $КЦ$ sin ft — а). Остальные вторые производные взаимной индуктивности равны нулю.

Формулу (5.10) удобно упростить, воспользовавшись представлениями полных эллиптических интегралов K и £ для малых и больших 6 (см., например, [19, с. 919]). Для малых 6, что отвечает удаленным кольцам, получим

(тр-).= -JT $ЦМГ'$ ’ 6·6’-< x

р-[т+4-^^|+4г'Ч?'‘‘+О|‘')1-

(-§яп)0= -)^ $“Г''$-й',’|>. $Н''$ x

X{1-[4+ 1 • <(’”

(wr),- «АГ* w* ' —4- [2+
+ 4г(1-3^-)*' + 0 (6‘)].

()0= X

x[п— -?''£•* + °<**)]-

и Формулы (5.10) получены О. Г. Чебориным.

При малых *k'*, что отвечает близкорасположенным кольцам почти одинакового размера, вместо (5.11) имеем

$$(\text{"gj'})_0 = \text{" "T" } \cdot \quad (\wedge u \wedge a)\ ** \quad \{2 \text{ --- } y\ *'^2 + \quad *'* +$$

$$> \text{т- *" T-}^2 \sim \text{т } ** + £\text{»''-}$$

$$\text{— 4- k'" In 4. | + } o\ f\ \text{In If-*)} \},$$

$$\text{m=-}^2\text{(m-).-} \qquad (5.12)$$

$$\text{(-aH.“ т “№’-i> (W'W ■'(*”-4-+}$$

$$\text{+ т"Чг-k (-4 «'•+ -8- *•’—TT‘"'"*) +}$$

$$\text{+ O (kt'6 In k’~‘)j ,}$$

$$(\text{а3Ц- -sr«r''*»r'}_{,}\text{>.(t}_u\text{t}_e\text{)"* •} \quad [2 \text{ —y-r*—}$$

$$\text{—32 * r 8 s h 4} \quad \text{—e.*(2} \quad \text{2 * + 32}$$

$$\text{--- } x \sim_r k^* \ln \text{■"-) + o (*'“ In A'-*}_1\text{)) .}$$

Вычисленные вторые производные взаимной индуктивности и формула (5.5) позволяют найти коэффициенты разложения магнитной потенциальной энергии вблизи положения соосности колец:

$$U_{\eta\eta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2}\right)_0,$$

$$U_{\zeta\zeta} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right)_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2}\right)_0,$$

$$U_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2}\right)_0, \quad U_{\rho\theta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho \partial \theta}\right)_0.$$

Случай физического маятника (см. (5.6)) не изменяет формулы (5.12), за исключением того, что к *Upb* необходимо добавить слагаемое *и'ръ* = 2о(7fрТ sin (ф — а) (т = *И2а* — безразмерная маятни- ковость), а к *Um* — слагаемое *Um* = *TaVUpp* -k 2от (t^-k 2t/p«).

§ 5. 3. Силы и моменты сил двух систем кольцевых токов

Используем полученные выше формулы для определения магнитной потенциальной энергии систем кольцевых токов, показанных на рис. 15. Свободное тело на рис. 15 изображено в

положении магнитной потенциальной ямы. Магнитная яма считается глубокой — максимальные линейные смещения свободного тела малы по сравнению с размером колец. Глубокая магнитная яма существует при выполнении условий

$$amgLT^2 < 1,\ amltfLVr « 1$$

(а, L, $4f$ — характерный размер, индуктивность и замороженный магнитный поток контура; m, со, I — масса, частота колебаний в магнитной яме и смещение).

Изменим координатное описание свободного тела следующим образом: пусть вместо цилиндрических координат центра масс р,

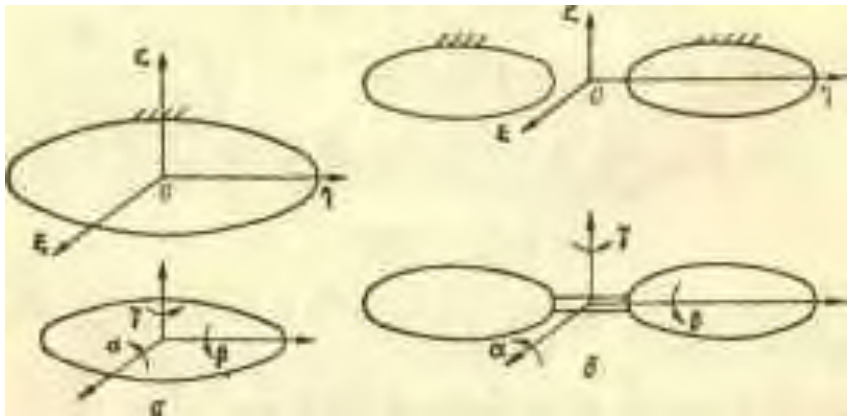


Рис. 15

«, £ будут декартовы координаты £, tj, £, а вместо углов Эйлера ф, яр ф — углы Эйлера — Крылова а, р, у. Такая замена позволит перейти к координатам, обычно применяемым в механике гироскопических систем (27J, и проще составить уравнения движения.

Пусть неподвижный трехгранник £т]£ (ось £ на рис. 15, $а$ направлена по оси неподвижного кольца и параллельна ей на рис. 15, б) и трехгранник xyz, связанный со свободным телом, в положении магнитной ямы в начальный момент времени одинаково ориентированы (ось x параллельна оси £, ось y — оси тц, ось z направлена по оси £). Условимся, что а > 0 — угол поворота против стрелки часов вокруг оси x, р — то же вокруг оси y, y — то же вокруг оси z. Воспользуемся следующими свойствами притягивающихся соосных магнитов: 1) малое боковое смещение от соосности вызывает восстанавливающую силу и момент, перпендикулярный оси магнитов и смещению, причем сила и момент пропорциональны смещению (коэффициент пропорциональности для силы равен Upp, для момента — (/£»); 2) малый поворот вокруг оси, перпендикулярной оси магнитов, вызывает момент и силу, направленную перпендикулярно оси поворота и оси поля магнитов, причем величины момента и силы пропорциональны углу поворота (для момента коэффициент пропорциональности равен £/<мы для силы = $Up\&\backslash$

у

Непосредственно из рис. 15, *а* следует, что сила *Pg,* направленная по оси £ вызывается смещением по оси £ и поворотом на угол Р вокруг оси *у.* Аналогично, сила P_v направленная по оси ц, вызывается смещением по оси Т и поворотом вокруг оси *х* на угол а. Направления сил, вызываемых положительными аир, различны; для а сила направлена в сторону положительных TJ, для р — в сторону отрицательных £.

Поэтому основной закон динамики в проекциях на оси £, TJ, £ для системы на рис. 15, *а* будет иметь вид

Для составления уравнений вращения механический момент маг- нитной природы

$$= — £/p£ — </рвР, m = — t/ppi] + Upa, \ ^{m}\ c—W$$

$$— mg\ W\& =$$

$$_{K} = K.l, + KK,$$

К.- +

выразим через орты *i\, h* трехгранника *xyz,* используя таблицу 4.4.21 работы [27] в линейном по а и р приближении (в глубокой магнитной яме а. р малы, у произвольно). Тогда получим

$$К = Kj + Куз\ Кя — Kg \cos y + Kr\backslash \sin y,$$

$$Ку = — Kg \sin v + К, со\ y.$$

Используя проекции механического момента на связанные со свободным телом оси, динамические и кинематические уравнения Эйлера 127], после преобразований получим следующую группу уравнений в частном случае динамической симмефни тела (А = = *В ф С),* вращающегося с большой скоростью вокруг оси Г со скоростью <о = const:

$$а'' — яоР' = — n*J — n-$$

$$1Л - C \qquad {}^{u}M \qquad „a\ .\ _\ S»_$$

$$\frac{d}{dt}\,,\ \Psi = \qquad \cdot \qquad {}_{A}?\ *\ ^{1} \qquad л<4$$

$$E, р'' 4- wx' = — na + пщ, (g\ jg)$$

Вместе с (5.14) они описывают движение быстро вращающегося динамически симметричного тела в глубокой магнитной яме соосных колец. Если этому телу сообщить маятниковость (центр масс удален по оси свободного кольца вниз на расстояние /), вместо (5.14) получим

$$m = — </pP—(U_{0D}i + t/ge)\ p,\ m<) = — U_{DO} + \qquad - Ufa) «.\ *\ .)$$

$$mt = — U\&$$

Проекциями механического момента на неподвижные оси в случае маятника будут

$$К, = — (^{м} + (/«pp + </_{t}I + \qquad + {}^{u}P№. \quad (5.18)$$

$$К„ « — (</„ + 1',p* + U,l + SU'D \qquad т\ *« = {}^{o}-$$

От них легко перейти к проекциям момента на подвижные оси и составить уравнения вращения маятника вокруг центра масс. Соображения, изложенные выше, могут быть использованы при составлении уравнений динамики свободного тела на рис. 15, б. В случае глубокой магнитной ямы все координаты этого тела (£, т)> £ *а,* р, у) малы.

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательные формулы для проекций главного вектора и главного момента магнитных сил в предположении, что расстояние между осями колец свободного тела намного больше их радиуса > *а)*

$$Pi - - 2ад - 2(\&_{s}р, К. = - 2 (//«, + Май)« + 2t£m, Я \quad 2(/_{„ч} +$$

$$2Uj_{№} К, = - 2£/e«P - 2C\&!;, \qquad (5.19)$$

$$Я = - 2ад. К, - — 2UPY$$

Кинематическими уравнениями Эйлера с учетом малости а, Р, V в данном случае будут

$$P = а + Ж$$

$$q = — уа + р, \qquad (5.20)$$

$$p = ра + у,$$

а динамические уравнения Эйлера с учетом выражений для $К., К_{и}, К,$ таковы:

$$Ap \text{ -f- } (C — B)qr = * — 2 (Lee + Uufi а 2t/p6i),$$

$$+ И - О rp - - 2t/_{ee}р - 2U\&\& \qquad (5.21)$$

$$Cr \text{ -f- } (B — Л) pq — —$$

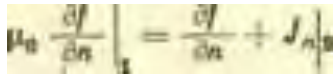
Глава в
МАГНИТЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТЬЮ СФЕРЫ И ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

б 6.1. Постановка задачи

В отсутствие макроскопических токов уравнения магнитостатики эквивалентны уравнению Пуассона в области намагниченной среды и уравнению Лапласа в области вакуума. Скалярный магнитный потенциал/, удовлетворяющий этим уравнениям,— всюду конечная и непрерывная функция, включая границу [и]. На границе раздела сред с различными магнитными свойствами выполняется условие непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции. Эго условие может быть записано различными

" В бесконечности потенциал f должен убывать как потенциал диполя или мультиполя более высокого порядка.

способами. Если использовать связь между векторами B, $Ии$ **намагниченностью** J, **оно принимает вид**



В другом случае, используя магнитную проницаемость намагниченной среды р, получаем

Одна из трудностей интегрирования уравнений для f **обусловлена неизвестным распределением намагниченности** J **в объеме реального магнита. Выход из этого положения ищут либо в привлечении выходящих за рамки магнитостатики механизмов намагничивания ферромагнетиков, либо в задании распределения** J **в объеме магнита [73, 741. Здесь будут рассмотрены идеальные постоян ные магниты, в каждой точке которых вектор** J **имеет одну и ту же величину и направление.**

Принципиальная трудность интегрирования уравнений для / связана с геометрической формой магнитного тела. Известные аналитические методы расчета поля приспособлены к тем случаям, когда граница раздела сред с различными магнитными свойствами является координатной поверхностью некоторой системы координат, а записанное в этих координатах уравнение Лапласа допускает разделение переменных. Используя одну из тринадцати криволинейных координат, допускающих разделение переменных 158, с. 6121, можно найти поля шара, эллипсоида вращения (сфероида), тора, конуса, бесконечно длинного цилиндра и других простых по геометрии тел. Если имеется два тела, произвольно ориентированных относительно друг друга, можно использовать лишь бисфери- ческую (биполярную) систему координат, в которой две неконцентрические сферы являются координатными поверхностями.

С учетом сказанного ниже рассмотрены поля изолированного вытянутого и сплюснутого сфероидов. Для определения / применяются координаты вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения a, **т, ф [18, 39]. В этих координатах наружная поверхность магнита описывается уравнением** o_o = const. **Рассмотрен случай параллельности вектора** J **оси сфероида (решение не зависит от ф). Параметром** o_0 **варьируется форма магнитного тела. В частности, значение** a_0 **1 соответствует длинному магниту,** o_0^ **0 отвечает идеально намагниченному диску.**

Необходимо отметить, что из всех систем координат с разделяющимся уравнением Лапласа не существует системы координат с двумя несоосными сфероидами как координатными поверхностями. Это лишает возможности иметь точное решение задачи поля двух сфероидов. Все же известное поле одного сфероида позволяет изучить взаимодействие системы сфероид — диполь (потенциальная

энергия диполя определяется его магнитным моментом и градиентом потенциала поля сфероида).

Бисферическая система координат £]£ используется здесь для расчета поля двух шаров и для поля шарового магнита внутри намагниченной сферической оболочки. Рассмотрены частные случаи параллельности и перпендикулярности вектора J отрезку, соединяющему геометрические центры магнитов.

Для решения рассмотренных ниже краевых задач используется метод Гринберга 120, гл. VIIJ. Он сводится к следующему.

Пусть функция f переменных S, s.....s_m удовлетворяет линей ному уравнению в частных производных

$$D\,[\mathrm{fl} = 0, \qquad (6.3)$$

допускающему частное решение

$$f - \mathrm{S(si)f(sa, ... m,)}. \qquad (6.4)$$

где S зависит только от s„ а F от S не зависит. Пусть при подстановке (6.4) в (6.3) и делении на SF получаем

$$-\Gamma^{C>,}+ \qquad К^{*}\,|^{Л}\,|^{1\,S} \qquad (6'^{5})$$

где оператор D_t уже не содержит S_{lt} а г, — функции только от так что

$$D, = IF\ (A\text{ —const}), \qquad (6.6)$$

$$-2;-1\ (S)\,j\,|\,+\,К'\,<^{*})\,+\,^{u}\,<^{S}<)1^{\,s}\,-\,^{0}- \qquad <^{6}-^{7}>$$

Тогда, давая Я какое-либо значение А — А* и обозначая через F_k и S_k соответствующие этому значению А решения уравнений (6.6) и (6.7), для функции

$$fk \text{ — J } rx\ (sj) \qquad (a,)\ f\ (Si, \quad .\ _{t}sm\ dSi \qquad (a, b \text{ — const}) \qquad (6.8)$$

получим дифференциальное уравнение

$$A\ t/J\ -\ W,\ ----------\ Л\ (S)\ -g-\ S.\ W\ |' + p,\ ЬI\ -g£-\ / \qquad (6.9)$$

Порядок этого уравнения на единицу меньше порядка исходного уравнения (6.3). Граничные условия для fk получаются умножением граничных условий для / (в нашем случае условий (6.1) и fi — fo на г] (sO 5* (so dS, и интегрированием по sj в интервале **la, И**

Если fk найдено, функция f (a„ .... s^J представляется разложением вида

$$f\ -\ S\ ЛА\ \{\ f\ г,\ (sO\ [S,,\ WIM.,)\ , \qquad (6.10)$$

где индекс k принимает значения, при которых функция / $(S|$, ...» sm) удовлетворяет граничным условиям по координате S,.

§ 6. 2. Поле магнита сфероидальной формы

Пусть вытянутый сфероид (рис. 16, *а)* намагничен в направлении большой оси *г* (намагниченность J = где J = — const, $T_г$ — орт по осй г). В координатах вытянутого эллипсоида вращения отср (или сфероидальных координатах, — см., например,

$$\bar{J} = J\left(\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2-\tau^2}\right)^{1/2}\sigma\bar{i}_\sigma + J\times$$

$$\times\left(\frac{1-\tau^2}{\sigma^2-\tau^2}\right)^{1/2}\sigma\bar{i}_\tau, \quad (6.11)$$

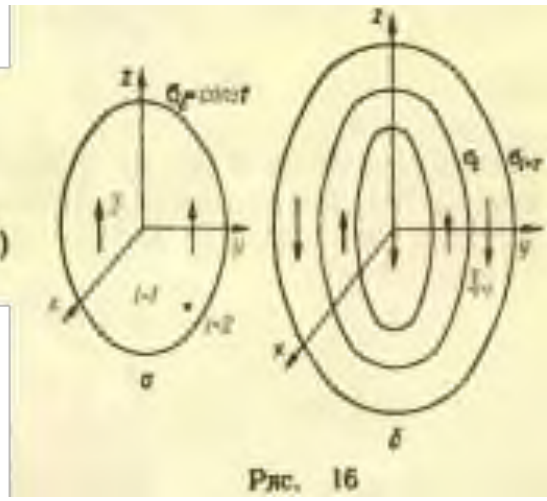


Рис. 16

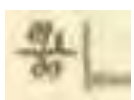
дают намагни-

[39, о. 190; 18, с._396l) выражение для вектора J записываем в виде где <0, it — единичные векторы сфероидальных координат. Они подобраны так, что

(6.12)

наружная поверхность магнита описывается уравнением a = $cг_о$ = const > > 1. Большие значения параметра $о_о$ (Оо > 1) отвечают сфере, значения

(6.13)



(6.14)

Оо > 1 ченный стержень.

Не зависящий от <р скалярный магнитный потенциал f_t (о, т) (- = 1 —

(6 15)

область внутри сфероида, » = 2 — область вне магнита) удовлетворяет

уравнению Лапласа и условиям сопряжения на границе о = оо

fi(Oo, i) т),

где о — линейный параметр сфероидальных координат Уравнение (6.12) допускает частное решение f_t —F (a) S (т).

Подставляя его в (6.12) и деля на FS, получаем

Поэтому[13]

$$(o^5 - l)F_e\text{-}|\sim {}_2oF_n - f(* + l)F = o \qquad (ft - \text{<onist}). \quad (6.16)$$

Это уравнение Лежандра, двумя линейно независимыми решениями которого являются функции Лежандра P_t **как**

Ч **Аналогичное уравнение можно получить для S (т).**

г на рис. 16 является силовой линией, производная $dSJdx$ в точках т =1, х = —1 должна равняться нулю. Этому условию удовлетворяют полиномы Лежандра $P_к$ (т), k = I, 2, ...

Функциями (6.8) в данном случае также будут полиномы Лежандра— либо $P_к$ (о), либо Q_k (о). Из условия ограниченности решения в области магнита и вакуума (учитывая, что Q_k (о) -• оо при *о* -> 1, а $Pк$ (о) -> оо при a -*■ oo) получим

$$fik = AкPк \text{ (о)}, 2 = BkQk \text{ (о)}, \qquad (6.17)$$

где произвольные постоянные A_k, B^* должны определяться из граничных условий для f_{lk}, fy,. Последние можно получить умножением условий непрерывности потенциала и условий (6.1) на $P_k(x)dx$с последующим интегрированием пот в интервале [—1,11. Отсюда находим

$$hk(°0) = U \text{ ЬI}), \qquad (6.18)$$

$$\frac{df_{1k}}{dx}\bigg|_{x=x_0} + \frac{aJ}{\mu_0}\int_{-1}^{1} \tau P_k(\tau)\,d\tau = \frac{df_{2k}}{dx}\bigg|_{x=x_0},$$

причем в силу ортогональности многочленов Лежандра интеграл в (6.19) не равен нулю только для k = 1. Поэтому ряд (6.10) в случае вытянутого сфероида состоит из одного слагаемого.

Учитывая известные формулы [19, с. 1033; 18, с. 21, 671

$$(«''— Ь = {}^{1к}+ \qquad \text{I} \qquad (7\backslash = P_к, ())),$$

$$\text{Qi (2)} = 2 \text{ Ar cth } z — 1, 2P_a(z) = 32^я — 1, \qquad (6.20)$$

$$Qi \text{ (2)} = \text{-j- } 2 \text{ (32* — 1) Ar cth z — 4- (3;® — 1)},$$

можно определить A_t, B_t в (6.17) (А* = B_k = 0 для $k=£=l)$ и получить искомые выражения для потенциала в области магнита /, (а, х) и в области вакуума /$_8$ (а, х):

$$/_1 \text{ (о, I)} = \text{-^-[о8 — I)} \text{ (О. Ar cth } o_o — 1) \text{ ох}, \qquad (6.21)$$

$$f« \text{ (о. Х)} = \qquad (4 — 1) o_в \text{ (а Ar chi а — 1) т.} \qquad (6.22)$$

Используя табл. 6.5—3 справочника [391, потенциалы можно выразить через декартовы координаты. Отметим, что из связи *г* = ста (2 — декартова координата) и формулы (6.21) следует известный факт однородности поля внутри сфероидального магнита [741. На больших расстояниях от магнита потенциал $(a$, т) имеет вид потенциалов диполя. Действительно, если с > 1, имеем

$$\text{Ar cth сдаст-' + -g-c*-}^3, /_a\text{~-5т. grad/,- J_ ,}$$

Для изолированного магнита в форме сплюснутого сфероида (рис. 17, о) удобно использовать координаты табл. 6.5—4 1391 Частными решениями уравнения Лапласа в области магнита в данном случае будут функции Q* (иг) P_4(т) ((— мнимая единица), в области вакуума— функции $Q_k(io)$ $P_k(i)$, причем ряд (6.10), как и для вытянутого сфероида, будет состоять лишь из одного слагаемого Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательную формулу для потенциала в области вакуума-

/а (°, т) ---------- o_0(1 + со)(о arcctgo — 1)т. (6.231

Метод Гринберга допускает обобщение задачи на произвольное число вложенных друг в друга вытянутых или сплюснутых сфероидов (рис. 16, *б,* 17, б), $_z$ описываемых уравнениями т—--..

О(— const В ОДНОЙ И той же системе сфероидальных координат (в областях между сфероидами О(и о намагниченность J.$_+$i предполагается постоянным вектором, параллельным оси *г).* В частности, для вытянутых сфероидов имеем такую краевую задачу. Найти функции f_t (о, т), удовлетворяющие уравнению

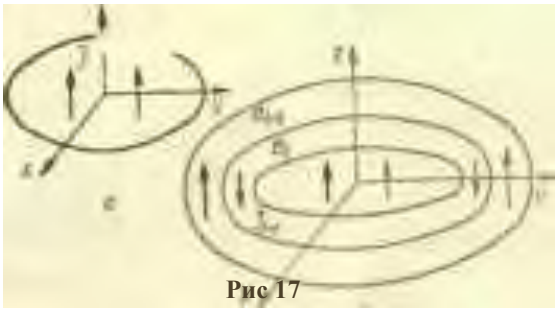


Рис 17

(6.24

1, ... , m а > 1 > т > — Г $\frac{\partial f_L}{\partial} = 0,$

и условиям на поверхностях О| — const (t = 1. условию симметрии

(6.25,

$J_{i+1}) = -\frac{\partial f_{i+1}}{\partial \sigma}$ (6.261

Пусть $fik = S_{lk}$ (о) F_{ik} (т). Подставим f_{lk} ■ (6.24). После деле

J ----*' ' *

ния на $S_M f_u$ получим

0.

<6.27

)

По теореме Гринберга [201 для функции

(6.28)

$fit\ (o) = J\ fi$ (о,

имеем уравнение

$$- \quad - \text{«л—- П -* “3г} \qquad +$$

$$+ \text{<1 - *■>} h \qquad \text{£2.,= 0.} \qquad \text{(6.29)}$$

Граничные условия для f_{tll} получим умножением равенств <6.26) на F_tk <т) dx и интегрированием по т в интервале 1—1, I). Из условия непрерывности потенциала следует, что F_{lk} <г) одинаковы для всех областей. Поэтому в F_{tk} <т) можно опустить индекс i и получить

$$fik \text{ |o—O, — —<} + M \text{ |»O-0^} \qquad \text{<6.3Д))}$$

$$\boldsymbol{ff = AP\ (a) + BjQ\ (a),\ ftn\text{-}tnt — B,+tQ_k(o).}$$

Для определения постоянных Л„ B, в (6.32) из уеловий (6.30) и (6.3I) получим

$$\pm \underset{\text{№т}}{} \bullet' \blacksquare + > \Big]^{rF}\text{-}<^{6}\text{-}^{3I}>$$

Общее решение уравнения Лежандра <6.29) в учетом т^буемой ограниченности решения будет иметь вид

$$\text{/и = -Л(О).}$$

$$fik = AaPк\ (O) + BQ\ (o),$$

$$fik = Ap\ \text{<°)} + BiQk\ (o). \qquad \text{<6.32)}$$

систему уравнений

$$\text{AP* (a<)} + \boldsymbol{B\&ц}\ \text{(cl — A+iP* (o,) —}\ \boldsymbol{Bt+Qk\ (p_{(})} = 0,$$

$$\boldsymbol{AtPk\ ifli) + BtQn\ (a,)} \text{ — A+iP* (G,) — B,}_{+}\text{C* (B,) = 4- —«+и»(6.33)}$$

$$1\text{= 1}\ldots\ldots\ldots\ldots n;\ An+ = Bt = 0,$$

где

$$\text{-}_{W\text{.}} = \text{— J}i \text{ == Л+i) j ’O.Wd’.} \qquad \text{(6.34)}$$

Система линейных алгебраических уравнений (6.33) имеет един- |*твенное решение

$$A_t \text{ —} \quad \underline{\text{(Oy)}} \qquad \text{« = я-!;} \qquad \text{A.^i—0,}$$

$$\text{— } \sum \text{ } Pk\ \text{(Oy)}\ Q\ \text{Ю} \sim Q\ \text{(Oy) p; (Oy) ’} \qquad \text{(635)}$$

$$\underline{\text{S}JyW\pm!p\ \text{(Oy)}} \qquad i = 1, \text{n;} \qquad \text{«й}$$

$$\text{. P* (Oy) } Q\ \text{(Oy) — } Q\ \text{(Oy) } P\text{\ (O„) ’}$$

Как и в случае одного сфероида, уравнением для F_k является уравнение Лежандра, причем из условия ограниченности решения при |т| — 1 необходимо взять полиномы Лежандра $P_к(m\backslash$ Так как полиномы $P_к$ (т) ортогональны на отрезке [— 1, 11, интеграл в (6.34) не равен нулю только для k — 1. Значит, решение ft *(о,* т) также будет состоять из одного слагаемого. В частности, для области вакуума ($i = n + 1$) получим

$$/„+, (а, г) - A (_0 \operatorname{Ar\,cth} a — 1) V (Jv = F J_{v+,})a_v (<4_V — 1). \quad (6.36)$$

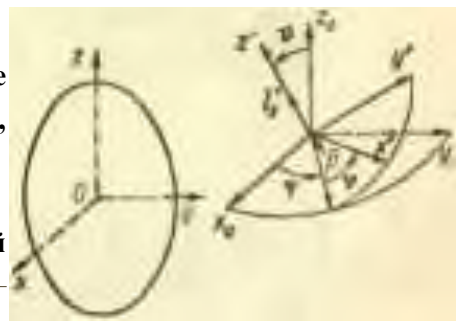
Сравнивая (6.36) *и* (6.22), видим, что рассмотренное распределение намагниченности приводит лишь к изменению постоянного множителя в формуле потенциала.

§ 6. 3. Энергия системы сфероид — диполь

На рис. 18 изображены неподвижный вытянутый сфероид, свободный магнитный диполь p и системы координат $Oxyz$, $O,д_0г_{с2}о$, $O_1x'y'z'$. Если ft, ф, ф — углы Эйлера, определяющие ориентацию связанного с диполем трехгранника $Oix'iyz'$ относительно трехгранника то

$$p = — pi'_B = — p (\sin ф \sin ftij —$$
$$— \cos ф \sin ft ц + \cos 6tj), \quad (6.37)$$

где $i\backslash_8$ — орт по оси О^; i_{lt} *ig,* i — орты, параллельные осям трехгранника или $Oxyz$.



Гк. 13

Записав скалярный магнитный потенциал (6.22) в виде = — Ax (о Аг cth a — 1), где А — const,

Потенциальная энергия свободного диполя в магнитном поле равна U p ■ grad /$_s$. Поэтому, используя (6.37), (6.38) и связи находим

$$\text{grad } h = \quad)*', \text{TfArctho — jr—п)'"} +$$

$$+ \frac{A}{a}\left(\frac{1-\tau^2}{a^2-\tau^2}\right)^{1/2} a\left(\operatorname{Ar\,cth} a - \frac{1}{a}\right)\tilde{i}_{\tau}, \quad (6.38)$$

между ортами декартовых и сфероидальных координат (см., например, [51, с. 2771), получаем

$$И = TT [\quad (о*'—1) * s*^{n\,\phi} \sin <^{a}- «) +$$
$$4- (\operatorname{Ar\,cth} о— \sout{azr})^{008} ♦ | • \quad (6\ 39)$$

где вместо сфероидальной координаты q использовано обозначение а, а переход от сфероидальных координат а, г к цилиндрическим координатам точки 0_x в системе $Oxyz$ осуществляется е помощью формул

$$\rho^* = a^{\circledR}(o^{\circledR} - 1)(1 - т^3),\ I = \text{сот.}$$

Аналогично, представляя решение (6.23) в виде f, — Лт $(o$ arcctgo — — 1), находим потенциальную энергию свободного магнитного

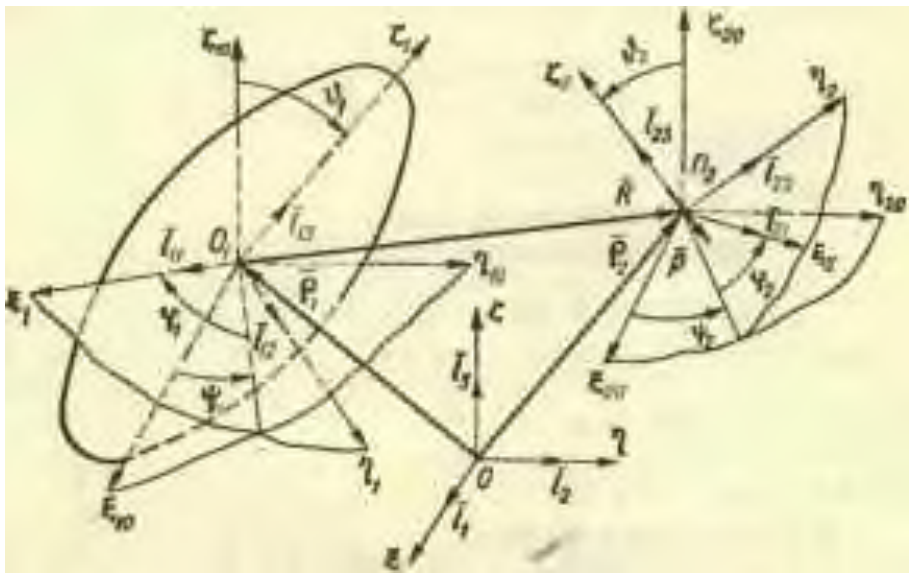


Рис 19

диполя в поле сплюснутого вфероида:

$$^{u} = \text{Trf} \qquad (\text{“nj^rpstaOsnUa} - \text{Ч}>) +$$

$$+\left(\operatorname{arcctg} o - \frac{o}{o^2 + 1}\right)\cos\theta\Big],$$

где

$$\rho^{\circledR} = a3(1 + \blacksquare\ a3)(1 - т3),\ £ = \text{сот.} \qquad (6\ 42)$$

Если сфероид и диполь являютвя свободными (рис. 19), определение энергии взаимодействия несколько усложняется. Пусть $i_ц$, $/_и$, $Ты$ — орты связанного ео сфероидом трехгранника Тогда вектор напряженности магнитного поля сфероида

$$Я = \text{grad}\ ft = Hi \cos Ф»ц + Я, \sin <p_и + Я_я 1_ц, \qquad (6.33)$$

где для вытянутого сфероида

$$4\text{-гг}Ьг^{\wedge}ЕлГ.\ »•-4(*«ь>—^). \qquad (6.44)$$

для сплюснутого

Я-4зОт?-)- (6-45> Определяя ориентацию трехгранника O^diCi относительно инерциального трехгранника 0£т£ углами Эйлера d„ фх, фх " используя таблицу направляющих косинусов

	6	It	4	
*11	cos <p, cos V, — —sin ф, sin фх^#,	cos фх sin фх + — stoft cos фх credj	sin фх sin dt	(6.46)
1 ‘1a	— sin фх cos ф — —CO ф sin ф| COS §i	— sin фх sin Ф, н- +- COфх COфх COdj	cos Ф, Sin d	
*1J	sin фх sin d,	— cos фх sin dj	cos du	

находим

$$Я = \{Я, [\cos тр \cos (ф + фХ — \cos \bullet« \sin фх \sin (Ф + Фх)1 + + Я, \sin О, \sin фх)\, i_t + + \{Я, |\sin фх \cos (ф + фх) + \cos 0, \cos ф^1П (ф + фх)1 — — Я2 \sin О, \cos фХ (s — [Ях \sin О, \sin (ф + фХ + Я, cosdj\, i_t. \quad (6.47)$$

Задавая ориентацию диполя p = —pi-м Ом— орт по оси углами Эйлера О„ ф„ ф, и учитывая, что

i_M = sin ф, sin d 2 *it* — cos ф sin 0,/, + cos $d_a i_8$, из (6.47) *и* (6.48) получаем выражение для потенциальной энергии

$$U = — p \bullet Я = pЯ, \{\sin ->_8 \sin (ф, — фх) \cos (Ф + фх + + [\sin \cos d, — \cos О, \sin d, \cos (ф — фх)) \sin (ф + фх) + + pH_t |\sin -i \sin d_e \cos (ф — фх) + \cos d, \cos OJ. \quad (6.49)$$

В (6.49) необходимо выразить сфероидальные координаты *о*, с, Ф через углы Эйлера —х, ф„ ф, (/ = 1, 2) и цилиндрические координаты pi, ai, & точек O_t. С этой целью запишем следующее из рио. 19 векторное равенвтво:

$$Pi — Pa + Я == 0 \quad (p, — p_t \cos ad, + pj \sin cu1, + \&i_t,$$

Я = p cos ф/x, + p sin ф»x, +- CGn), откуда следует

$$Pi \cos a\, x — pg \cos a, + Я \cos фх \cos (ф + ф) — — Я \cos О, \sin фх \sin (Ф + фх) + £ \sin d, \sin фх = 0, pi \sin <^i — p_s \sin a, + Я \sin фх \cos (ф + фх) + \quad (6.50)$$

$$4- Я \cos di \cos фх \sin (ф + фх) — £ \sin Oj \cos фх =» o,$$

(9

$$Ci — c» 4- /?\sin\sin(<p + q>) 4- £\cos ft, = o,$$
$$£ = act,$$

где f> = a [(o' _ 1) (j — *2)]V.

для вытянутого сфероида и р = a 1(1 + o^8)

(j — для сплюснутого. Из (6.50) находим

$$p\cos(ф + ф,) = p_8\cos(a_t — TP — pi\cos(a, —$$
$$p\sin(ф + vJ\ COS\ ft, = pg\sin(a* — ф,) — p,\sin(в! — ф,) f £\sin$$

(6.51) C

$$= — P»\sin(a, — ф,) + p,\sin(a, — ф,) + (£ — 5,)\cos_c{}^*(a^* + Ts — 1) = pf + p^8 —$$
$$2p\cos(cH — a^*) + (£j — 5J^8.$$

Это позволяет выразить параметры о, т, «рв (6.44), (6.45) и (6.49) через степени свободы сфероида и диполя, что и решает поставленную задачу.

Если имеется не один, а произвольное число n свободных дипо тей («магнитный рой»), к энергии (6.49) необходимо добавить энергию взаимодействия диполей друг с другом. Добавочный член, как нетрудно показать, равен

$$Hi — \overset{л+1}{i\$J\ '\ \{p,p_к}\ [\sin ft, \sin ft^*\cos(ф<— ф^*) + \cos ft, \cos f^*|\ Rjf_4$$

$$4- Зpip_k\ \{\sin ft, |p^*\sin(ф, — a^*) — p,\sin(ф, — at)\}\ 4- (£^* — £)\cos ft,)\ X$$

$$X\ \{\sin ft^*\ |p,\sin(ф^* — at) — p^*\sin(ф^* — a^*)|\ 4- (C — У\cos ft^*\}\ Rjf,\ Яш = IP?\ 4-$$
$$P^* — 2p,p^*\cos(a, — a^*) + — УТ1\%\ (6.52)$$

§ 6. 4. Поле двух шаровых магнитов

Определим магнитостатическое поле двух шаровых магнитов с постоянным по величине и направлению вектором намагниченности T = const (идеальный магнит). Рассмотрим сначала случай параллельности J отрезку, соединяющему центры шаров |3] (рис. 20). В данном случае скалярный потенциал f в областях магнитов (I = 1, 2) и вакуума (i = 3) удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границах магнит — вакуум — условиям непрерывности / и нормальной компоненты магнитной индукции:

$$ft = fi.\ Po\ 'T“ +■ \quad =$$
$$0=1.2), \qquad (6.53)$$

где n — внешняя нормаль; p_0 — магнитная постоянная.

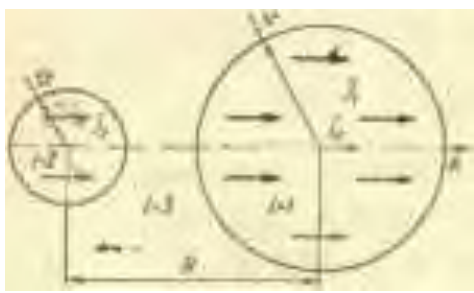


Рис. 20

Для определения f используем бисферическую (биполярную) систему координат &]< [11, 58], в которой две неконцентрические сферы являются координатными поверхностями т, = const (t = = 1,2). Ось x, проходящая через точки A, B на рис. 21, является осью симметрии поля магнитов. В меридиональной плоскости, проходящей через ось x, положение точки пространства задается вели-

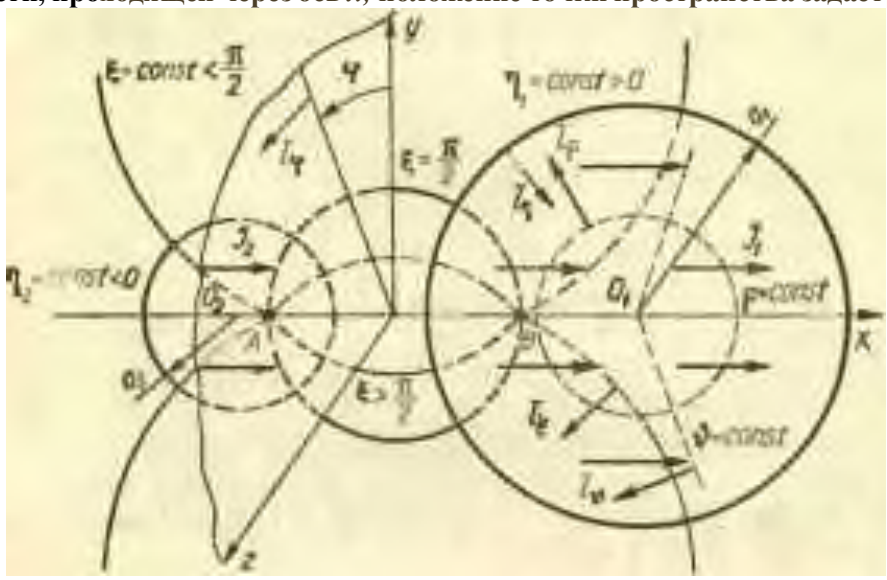


Рис. 21

чинами £. т], а сама плоскость — углом ф, который она образует с плоскостью xy.

Поверхности £ — const при £, близких к я, имеют веретенообразную форму, при $£$ -»■ они превращаются в сферы с воронкообразными углублениями. Отрезок AB соответствует «веретену» £ =» = л, полупрямые влево от A и вправо от B — «сферам»£ == 0.

Поверхности т = const являются сферами, причем справа ш плоскости $гу$ значения т положительны, слева — отрицательны Сама плоскость $гу$ описывается уравнением т — 0. При увеличении положительных т радиусы сфер т = const уменьшаются, и в пределе т) -> оо сферы превращаются в точку B. При уменьшении от рицательных ц предельное положение сфер г-* — оо соответствует точке A.

Если векторы намагниченности обоих магнитов направлены Е одну сторону, то 7, = J^tx (Jt = const; i = ₁, ₂), где i_x — орт по оси x на рис. 20. Очевидно, J, является градиентом функции $J_(x$ в декартовых координатах. Их представление в бисферических координатах

Л — — $J_($ (ch г — cos £)"' [ch т] sin £/•.— 1 — h j os D) „т,] (6.54) можно получить, выражая x через бисферические координаты и используя формулу градиента в бисферических координатах. Так как $З$, не зависят от ф, искомое решение также не зависит от ф.

Уравнение Лапласа в бисферических координатах не разделяется. В связи с этим введем функции

$$V(E, n) = fi(E, n)\ (\text{ch } П — \cos Э^{*''-} \quad (‘ -1.2.3), \quad (6.55)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$НЕТ\ т'г\ Нт) + >-TV‘-^{\circ} \quad '' *\bullet\ ^{2}.\ ^{3}). \quad (6'56)$$

допускающему разделение переменных. Определение условий на границах магнит — вакуум для функций Vi **(Е, тJ) сводится к использованию формулы дифференцирования по нормали к поверхности т](= const (/ — 1,2), условий (6.53) и формул (6.54), (6.55). В результате при — const, 0 Е я (/ = 12) получим**

$$Vi\ (Е, Л)\ ln=, “\ t^s\ (E»\ и)\ 114=1» \quad (6.57)$$

$$Jgl\ ,\ _«Zt__\ ^*gL|\ , \quad (6.58)$$

$$Mo\ (\text{ch } ту — \cos \quad ^*F \quad '$$

где a **— линейный параметр бисферических координат.**

К этим условиям добавим условия на границах координаты Е, используя тот факт, что ось x **на рис.** 20 **является силовой линией: при Е = 0, —оо < т < +<»**

(/ - 1,2,3), **(6.59)**

при Е = J —оо < Т < 4-оо

$$*_\wedge''^{0} \quad (' “ 1,2,3). \quad (6.60)$$

Пусть v_t **(Е, т) =** Fi **(тJ)** T **(Е) (/ =** 1**, 2, 3). Подставляя это в** (6 **56) и деля на** $Fi\ T$**, получим**

$$+ Пйт4г(’'''^{!}4г)-т^{=0} (' “1,2,3). \quad (6.61)$$

Первое слагаемое в левой части (6.61) зависит только от тJ, второе — только от Е. Поэтому для какого-нибудь действительного А = А* имеем

$$— V» = 0 \quad (/ - 1.\ 2,3), \quad (6.62)$$

$$-£-((1-<*>Ф++»(«+1)П “ 0\ (t = \cos g,\ v\ _\ A.--g-j\ . \quad (6.63)$$

Функции $V/$ **(Е, т) удовлетворяют теореме Гринберга [201, в соответствии с которой для функций переменной т]**

$$VU\ (П\ -J\ Vi\ (/, т)\ Tv\ (t)\ dt\ 0=1,2,\ 3) \quad (6.64)$$

имеем дифференциальное уравнение

$$Xv = \quad {}^{v}{}'{\sim}a{\sim}\ \text{Ц}\text{"}\ \text{o}\ (* = 1.2,3)\ (6.65)$$

и граничные условия, получаемые из (6.57), (6.58) путем умножения на $Txdt$ и интегрированием по t в интервале I—1, 11:

$$V* \text{(и)}\ !\text{л}^{-\text{п}}(= {}^{v}S*\ (\text{Л})\ 1\text{^-^} \qquad = {}^{1}, {}^{2})> \qquad (\text{g}\ 66$$

где

$$Ju\text{- И)}\ \text{f}\ /\text{f}^{-1}{}^{1}*,2/.\ Tv\,(\text{o}\ dt. \qquad (6\ 67)$$
$$\text{Me J (ch r}< — ty.$$

Общим решением системы уравнений (6.65) с учетом необходимого поведения функции ty* при |л| -► со (при |л1>* оо функции $V*$ должны стремиться к нулю, так как из-за множителя (cti r — — cos|)'^ нельзя будет получить ограниченности потенциал а /8(|, л) являются

$$V** = \text{Q exp}\ v®* = \text{Ca exp (— Мл), j = C>shX* л + C}_4\ \text{ch X*л,} \qquad (6.68)$$

где Сц C_4, $C_в$, C_4 — постоянные, определяемые из условий (6.66). Относительно четырех неизвестных эти условия дают систему четырех уравнений с единственным решением:

$$Cj = \quad (\text{и}\ {}^{\text{ex}}\text{P (— Мл») — Л) exp —— Чо01 •}$$

$$C. = -Щ- [Jj* \text{exp Мл} — Ji* \text{exp Mil),} \qquad (6\ 69)\ \text{C}_8\ \text{“}$$

$$Щ\ J\ {}^{\text{ex}}\text{p (— MW} + {}^{J}J* \text{exp Mil.}$$

$$\text{C}_4 — \text{"af}\ [J\ ** \text{exp (— Мл»)—} Jj.* \text{exp Mill-}$$

С учетом (6.69) формулы (6.68) приобретают вид

$$Vu = \text{-щ-}\ (•* \text{exp Я*}\ (\text{л} — \text{Т})—{}^{J}u \text{ exp Я.}\ (\text{л} — \text{rn)J,}$$

$$V_M \text{ - -Щ- 1Л* exp } K\ (\text{Л.} — \text{л}) — Jj* \text{ exp } h\ (\text{л,} — \text{Т)l.} \qquad (6\text{-}^{70})$$

$$\text{ц, - '2Й}^{-}\ |J''\ \text{СХР}\ ** {}^{1,1} — \text{Я'}) — J* {}^{<\text{яф}}\ Я*^{(\text{T}|)} — \text{Т)1-}$$

Определим теперь функции T_v (t), которые должны удовлетворять уравнению Лежандра (6.63) и граничным условиям, аналогичным условиям (6.59) для функций v_t (£, л)-

Общим решением уравнения Лежандра является линейная комбинация функций Лежандра первого рода Pv (О и функций Лежандра второго рода Qv (/). Так как Qv (О в точках t — —1, t — +1 имеют особенность, необходимо взять только функции первого рода. Кроме того,

$$(\cos\text{©}\text{---------} \text{ ----} \ (\text{v -h| } (\cos\text{©}. \qquad (6.71)$$

Поэтому из граничных условий для Tv (£) и (6.71) получаем

$$\text{P7}_1 (\text{COS } £) \ |e_o - \qquad (\cos a - 0. \qquad (6.72)$$

Таким образом, определение $T,,$ (£) свелось к отысканию нулей функции Лежандра P7$_1$ (cos £), общих для £ — о и £ — я.

Теория нулей сферических функций P7™ (cos £) при £, близких к 0 или я, изложена в работе 118]. При £ — 0 нули P7" (cos £) совпадают с нулями цилиндрической функции J_m(2v sin J-). Но $J\ IkX$ X 0) — 0 при любых действительных $к$. При £ -*■ я нули функции Pv^m (cos £) определяются формулой

$$v—m + \text{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому индекс А» в функциях vu принимает значения

$$*» — \text{V} + 4\text{-•} \text{ V} — 1, 2, 3, \ldots$$

Определив vi (rj), Tv (£) и предполагая непрерывность искомых функций v_t (£, т) на основании теоремы о разложимости в ряд по собственным функциям можно получить искомые выражения для скалярного магнитного потенциала:

$$И \text{ (E, Л)} — \text{-------(ch г — cos£)V'g } P_k(\cos£) \text{ x}$$

$$^{X}Ё \qquad »'''ф+ \text{ -^)}_{P}\text{-(Л.—л)| Г ij}jP; \text{ '.«O'.}$$

(Б.ТЗ)

$$Pi = \begin{cases} \text{f} — 1 & (1\text{-}1; \quad m — 1,2), \\ 1 & (/ — 2; \quad m — 1,2), \\ \text{l}(— 1\Gamma^{+1} & (i = 3; \quad m — 1,2), \end{cases}$$

где учтены приведенные выше формулы и условие нормирования для функций Лежандра.

При большом удалении шаров вы^шке .:. (6.73) является решением задачи поля одного идеального шарового магнита. Получим известный результат 174], состоящий в том, что поле внутри шара однородно. Этот случай соответствует большим т|I — —^$_2$ в

формуле (6.73). При этом интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[IP.<П^*}{J} \qquad (6.74)$$

в силу ортогональности многочленов Лежандра равен нулю для всех k, кроме k — 1. Поэтому ряд (6.73) будет состоять из одного слагаемого, а скалярный потенциал и вектор поля внутри шара т > 41 будут иметь вид

$$fi\ (£, Ч\ \text{—----------th -—}\ \%\ a\ \cos E\ \exp / \text{----------}\ j\ (\text{ch}\ 4 — <x» D)^*\text{-}4 \qquad (6.75)$$

$$H = \text{grad}\ fi = \text{th}\ 4т4ı\ (\sin I\mathit{I} + \cos £1'4).$$

При больших 4i поверхности E = const бисферических координат (см. рис. 21) приближаются к конусам с вершиной в центре шара Ti — const. Поэтому при 4! 1 координата) бисферических координат совпадает с координатой б сферических координат р, О, ф, помещенных своим началом в центр шара таким образом, что ось x описывается уравнением О = 0. Орты сферических координат ip, $i)$ при 4 > 1 _связаны_с ортами It, ц следующим образом (см. рис. 21): = —t_n, ie = Однородное акторное поле $D = Di,,$ параллельное оси x, запишется так: $D = D$ (—sin О + cos Oi_p). Поэтому поле вектора напряженности внутри шара однородно. Однако, если имеется не один, а два шара, однородность поля нарушается.

Рагсмотрим случай перпендикулярности векторов намагниченности J_t отрезку, соединяющему центры шаров (рис. 22). Вместо ^5.54) имеем

$$\text{---- ..in .} \qquad (6.76)$$

Компонентами, направленными по внешним к поверхностям магнитов нормалям, будут

$$A\text{-}'\text{-}^1)' \qquad (6.77)$$

Как и выше, введем функцию

$$«*(£, 4» ф) = /< \&\ \text{ч. ф)}\ (\text{ch}\ 4 — \cos \qquad (1 — 1, 2, 3), \quad (6.78)$$

где ft (5, 4, ф) — скалярный магнитный потенциал в области магнитов (i = 1, 2) и вакуума (i = 3). Функция v_f (£, 4, ф) удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\text{ТЙ_Г}(^{5'П}5'\text{w})^{+} \qquad \text{---------}T^{0}* = {}^{0} \quad (» = 1.\ 2.\ 3) \qquad (6.79)$$

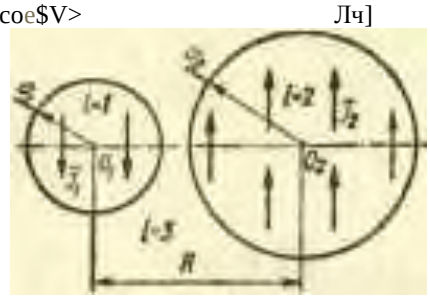
и следующим граничным условиям:

при п = Ле — const Oh >0, Т< 0), 0<Кл,

$$Vi = Vs \quad (I — 1, 2), \tag{6.80}$$

4£- + **.in△h ┼,ч*1** **(/ = 1, 2), (6.81)**

*1 Но (chn, —coe$V> Лч]



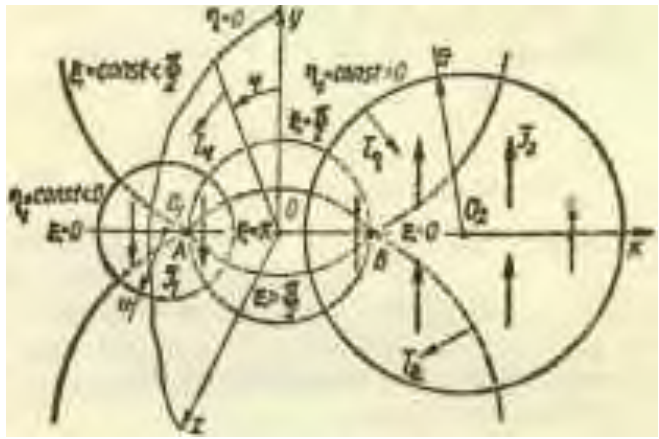


Рис. 22

при £=’ o, 5 = **Я, — oo <i)<** + o2**я**

4г~° **(*=1,2,3),** **(6.82)**

при ф = o, **ф m2я, — oo < т <** + **oo,** o<**£<л**

■g— 0 **0= 1, 2,** *3).* **(6.83)**

Из общего вида частного решения уравнения Лапласа в бисфе- рических координатах [11, с. 89]

(ch n — cos g)ᵛ‘ *[A,, e Ь* ⁺"**)** ⁴ **4.** *BJT* **) ***j** ₓ

x ***[CnPT*** **(cos £) +** ***DnQ~*** **(cos I)1** ***(Em*** **cos** ***m<*** **+** ***Fm*** **sin** ***m<)***

(/4, *B,* **...,** *F* **— const;** *PIIᵐ* **(cos £), Q~™ (cos I) — присоединенные функции Лежандра), условий (6.82) и (6.83), указывающих, что зависимость решения от ф сводится к умножению на cos ф, следует, что в данном случае** $E_m\Phi$ **0 только для** m **=1, а** F_m **= 0 для**

всех m **Поэтому искомое решение разлагается в ряд по функциям Лежандра** P **(cos D, причем индекс** k **для выполнения условии (6.82) принимает значения** k **= 1,2, ...**

Согласно теореме Гринберга [201 функция

$$\text{Ч. (П)} — \text{J } ч,e'. \text{ W d* (t - 1,2, 3)} \qquad (6.84)$$

удовлетворяет уравнению

$$\text{"л,т- - (п+ 4г)""} \qquad (6.84)$$

которое легко получить делением переменных уравнения (6.79), и граничным условиям при тц = const $\{I$ **— 1, 2), получаемым умножением (6.80) и (6.81) на cos ф** $Pь$ **(/)** dt **и интегрированием по** t **в интервале [— 1, 11:**

$$vik = v_{№} \quad (= 1, 2),$$

$$+ \text{------}\underset{I'1*'}{\text{sh}}\ \text{Injcos}\ \underset{Ф^}{Ф} \backslash \text{----------} \underset{*»}{I — л - ——} \quad 0—1, 2).$$

*1 N

- (6 86) Для ограниченности решений в областях $1=1,$ **2 члены типа exp Ау где Я > 0, должны быть опущены. Поэтому решениями (6.85) будут**

$$= A, \text{ exP } (— 4ц), \quad {}^{V.№} = D>ex\,p\,k4, \qquad (6S7)$$

$$v\# = B, \text{ sh } кц + C_{ft}\text{ch fa},$$

где произвольные постоянные определяются по (6.86). Определив $v_t k,$ **а также учитывая выражения (6.10), (6.84) и равенство** $ЦрЧОЯ\ Ъ$ **-**

-3

получим искомые формулы скалярных магнитных потенциалов:

$$\text{fif. я. Ф>} \qquad \text{COSIMO» X}$$

$$\text{x V ИТ+П} \qquad \text{s (— }^{l)"»+'}\text{X}$$

$$\text{f—l} \qquad m=$$

$$\text{X «Р[(* +} \qquad \text{J} \qquad \text{« = '• }^{г}\text{- 31-}$$

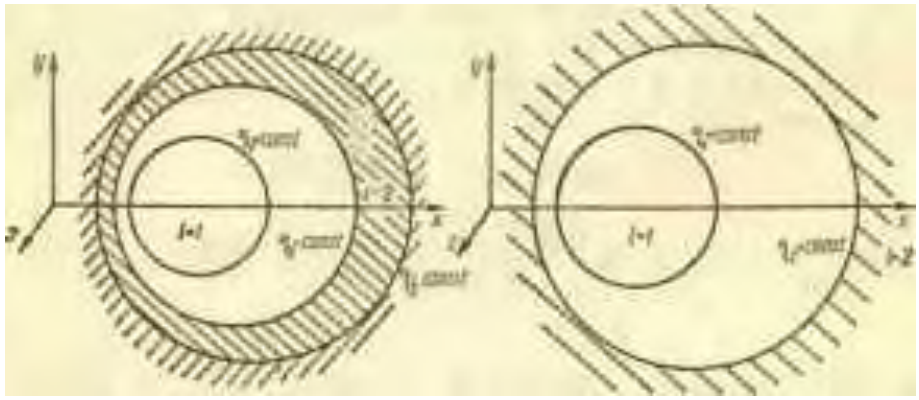
$$\text{U — 1} \qquad \text{1(- 1)}^{т} \qquad \text{«-■;».= !. 2), (6'88)}$$

$$\text{(t = 2; } m\text{-1. 2), (6.89)}$$

$$\text{(, = 3; т=1, 2).}$$

§ 6. б. Шар внутри намагниченной сферической оболочки

Для магнитной системы на рис. 23, *а* границами раздела сред с различными магнитными свойствами являются неконцентрические сферы т]< = const (i = 1, 2, 3) одних и тех же бисфе- рических координат. Для $i = 1, 2$ выполняются условия сопряжения на границе магнит — вакуум. Поверхность $т]_a$ = const является границей постоянного магнита и идеального магнетика (р =



= оо), на которой скалярный магнитный потенциал является постоянной величиной. Не уменьшая общности, примем значение этой

постоянной равным нулю. В случае $т)_5$ •*■ — оо магнитная система имеет вид, представленный на рис. 23, *б*.

Если намагниченность двух магнитов на рис. 23 параллельна отрезку, соединяющему центры сфер TJ, = const, решение краевой задачи для f_t (g, TJ) аналогично полученному выше решению для магнитной системы на рис. 20. Отличие состоит в том, что для трех уравнений (6.65) и четырех граничных условий (6.66) необходимо добавить граничное условие v_2* (iO|$_4$~q = 0, а решения (6.68) записать в виде

$$\text{« Ci exp (— } li) \, v_{2k} = \text{C, sh } X^* \text{ (rj — тц),} \qquad \text{(б}$$

г

Гвс 23

$$^{v}M = C \text{ sh 1ц + C* ch A*т).}$$

Тогда вместо (6.70) получим

$$^{C‘*} \text{ " - } ДТ \qquad \text{M» sh (1 (ш -1^1+ Л» Sh (1 f — 78)1}.$$

$$\sim \text{XT} \qquad 4 \qquad \text{sh } fa \, T \text{ - nr)], (6.91)}$$

$$^{=} \sim \qquad \text{sh [Я* (т — т]a)1 +} \qquad \text{X}$$

Искомые формулы скалярных магнитных потенциалов принимают вид

$$/((Ь\ П) = (\text{ch}\ T — \cos B^{*'}£\ (\cos B\ (\ = 1, 2, 3), \quad (6.92)$$

где v, **определяются из формул (6.91), (6.67), а А*** = k + **-У.**

Если намагниченности магнитов перпендикулярны отрезку, соединяющему центры сфер т, = const, то формулы скалярных магнитных потенциалов, полученные аналогично решению для магнитной системы на рис. 22, таковы:

$$ft\ (£, т), ф) = (\text{ch}\ n — \cos £)''\bullet \cos ф\ y\ \frac{V_{*}\ (J\ P_{*}\ (_{1}06\ B}{}. \qquad V \bullet\bullet 1, 2, 3), \quad (6.93)$$

где v, **определяются по (6.91),** $k^{*}= k$ **4-** **а**

$$^{J}* - -^{\wedge}.*1\%!\ j\ \frac{(\text{ch}\ _{Щ}}{c\ (1\ _\ /*)'\ p^{*}\ (Л} \qquad dt\ (Ц\ = 1,^{2}).$$

§ 6. 6. Формулы магнитной энергии

Имея решения краевых задач, энергию взаимодействия шаровых магнитов можно получить из следующих соображений. Плотность энергии поля в случае J — **const будет** $2w$ — p_{o} **(grad /)^r в области вакуума и в области магнита** ^{w} **Интегрирование плотности** w **по объему, занятому полем, можно свести к интегрированию по поверхности магнита, если учесть тождество (grad /)^a = div X X(/ grad** f**) —** f **div grad/, разбить весь объем на несколько (внутри магнитов и объем вакуума) таким образом, чтобы удовлетворить условиям применимости теоремы Гаусса, превратить объемный интеграл в интеграл по поверхности, а также учесть равенство нулю интеграла по бесконечно большой поверхности и равенство dSu = = —*dS(,* где** $dSM, dSi.$ **— векторы площадок, нормальных к наружной поверхности магнита и вакуума.**

В результате формула энергии магнитного поля W **будет иметь вид**

$$W = O^{*}\ £\ j\ \text{sin}\ g\ (\text{ch}\ \%\ —\ \cos\ !)\text{-}2\ d£d<p, \quad (6.94)$$

где n — **число поверхностей j = const, являющихся границей магнит — вакуум.**

Вычислив значения скалярных магнитных потенциалов и нормальных компонент намагниченности на поверхностях %, после преобразований получим следующие результаты из формулы (6.94):

[u] По этому поводу «м., например, 111, «. 391.

магнитная система на рис. 20 (используются формулы (6.54), (6.73) и (6.94))

$$\text{от} \bullet — \text{f W } |\text{M»} + \text{M*} — 2(\text{У,Л}_{\text{и}}<\Gamma^{\text{ЧЛ}\text{“’”}}|, \quad (6.95)$$

2:

магнитная система на рио. 22 (используются формулы (6.77), (6.88) и (6.94))

$$\text{»г - f X. ' } |\text{M}_{\text{U}} + \text{Mi, } — 2\text{M}_{\text{и}}\text{M}_{\text{в}}\text{Л}^{\text{’к}\text{^’}}) \text{ (Ч, < 0, „, > 0).} \quad (6.96)$$

(v-1, 2; * +

магнитные системы на рис. 23 о намагниченностью, параллельной эксцентриситету (используются формулы (6.54), (6.92) и (6.94)),

$$\Gamma \qquad \text{jpf, }_{+}\text{ ft.} \quad (6.97)$$

<мв)

Pv»-«‘*'r"kW» (ч, >4.>4$_s$>0; v-1, 2; Ч“» + т);

магнитные системы на рис. 23 в намагниченностью, перпендикулярной эксцентриситету (используются формулы (6.77), (6.93) и (6.94)),

$$Q_{vh}\text{же}^{\text{x}*\text{w}\text{’}\text{^}\text{‘}\text{„}}\text{Afvfe} \qquad (\text{п. >П}_2\ >^{\text{r}}\text{ls } >0;\ \text{v =.. 1, 2; Z*-fc}$$

Формулами (6.95) — (6.98) энергия магнитного поля определена как функция бисферических координат ч* и линейного параметра этих координата. Для перехода к зависимости от расстояния между центрами шаров /? параметры т^, *а* необходимо выразить через *R* и радиусы шаров о», в, (11, в. 76J. В частности, если к < 0, ih > > 0, то

$$\text{—Arshj-J-sh (ч, —1),)|,}$$

$$\text{Hi “ Arsh [^- sh (ч, — !h) Г}$$

$$a = \quad \textbf{sh (41 — ’1J.} \quad (6.99)$$

$$\textbf{п, - п, = Arch -—.}$$

Часть III

Исследование динамики и устойчивости стационарных движений

Глава 7
ПРИВЕДЕНИЕ

§ 7. 1. О зависимости магнитной потенциальном энергии от угловых координат

В части II для ряда моделей магнитов была определена потенциальная энергия магнитного взаимодействия U. В качестве степеней свободы каждою тела выбирались цилиндрические координаты центра масс р, а, £ н углы Эйлера О, ф, ф, определяющие ориентацию связанного с телом трехгранника относительно трехгранника инерциальной системы отсчета. Положение связанного с телом трехгранника подбиралось так, что его начало совпадало с центром масс, *а ось* собственного вращения — с осью динамической симметрии тела. В частном случае совпадения магнитной и динамической симметрий начало связанного С телом трехгранника совпадало с центром магнитной симметрии, а ось собственного вращения — с магнитной осью тела.

Пр» указанных условиях в случае совпадения магнитной и динамической симметрий магнитная потенциальная энергия не зависит от углов собственного вращения ф,. Остальные углы входят в формулу энергии только в виде тригонометрических функций от разности этих координат. Точнее, энергия $I/$ является функцией координат вида

$$U = U\,\mathrm{Lx},\ \&\ -\ \underset{\mathrm{I}}{\qquad}\ (\text{оч} - \phi_{\text{т}}),\ \text{a»}(\phi\text{»} - \text{th}_{\text{„}}),\ \cos(\text{o<} - \text{cQ}\ .\ \underset{\mathrm{I}}{\qquad}$$
$$\sin$$
$$i,\quad m<= I,\ ,\ n. \tag{7.1}$$

Если магнитная и динамическая симметрии тела не совпадают, вместо (7.1) будем иметь

$$U = U\,|\mathbf{pf,\ Ь} - \mathbf{£.\bullet\ O^{*}}.\qquad \mathbf{-\ Фт).\ COS\ (\phi/\ -\ Фт),\ COS\ (CQ\ -Ф1\ j\ ,}$$
$$\mathrm{C\ т} = 1.\ ,..,\ n. \tag{7.2}$$

Вид (7.1) для длинных цилиндрических магнитов следует из (3.5), (3.10) , (3.11), для токовых колец — из (5.2), для сфероида и дипо-

лей — из (6.11), (6.49), (16.5]), (6.52) Вид (7 2) в случае несовпадения динамической и магнитной симметрий длинных цилиндрических магнитов следует из (3.15).

Ход доказательства справедливости (7 1) или (7.2) в общем случае магнита с осевой симметрией поля следующий.

1. Для любой модели энергия магнитного взаимодействия может быть определена интегрированием по объему и наружной поверхности магнита некоторой функции расстояния *R* между источниками магнитного поля (для длинного цилиндра — расстояния между зарядами, для кольца или среды с намагниченностью *J* — расстояния между элементами макроскопических токов или токов намагниченности).

2. Для вектора расстояния *R* всегда может быть составлено векторное уравнение типа- (3.12), слагаемые которого могут быть выражены через степени свободы тел p_o а,, L. Ф<, ф,. ф* (f = 1*n).* Следовательно, в общем случае *R* будет функцией координат вида

$$Л = я|й.\ \&\ —\ U,\ Ф.^{от}(а. — Ф_{„}).\ \cos(ф, — фт),\ \cos(а_{ж} — a_{,,})\ X\ МП$$

$$COS\ I \quad . \quad ,$$

$$X \qquad \text{<7.3>}$$

3. При интегииртвании по о^ему и noMpxtKJCTH мэтнити зависимость от углов ф в случае совпадения магнитной и динамической симметрий исчезает. Это следует из того, что *R* периодично по $ф_{(}$ с периодом 2л. Поэтому интеграл от любой функции в интервале величиной 2л не зависит от начала и конца интервала. Иначе говоря, в качестве угловых координат элементов объема и поверхности магнита могут использоваться углы собственного вращения ср. Но этого нельзя делить, например, в том случае, когда ось собственного вращения и магнитная ось кольца с током не совпадают, *а параллельны.* При обходе точки кольца ни 2л ридиин луч, соединяющий эту точку с точкой оси собственного вращения, может описать сектор с углом, меньшим 2л.

Итак, справедливы следующие утверждения.

Теорема 7.1. Потенциальная энергия св£бдных магнитно взаимодействующих тел относительно цилиндрических координат р,, au Zi центров масс тел и углов Эйлера **ф, ф,, Ф,** *при условии, что ось собственного вращения направлена по оси динамической симметрии тела, является функцией угловых координат вида* **(7.2),** *т. е. зависит от углов собственного вращения, а остальные угловые координаты в формуле энергии содержатся только в виде разности в тригонометрических функциях.*

Теорема 7.2. При выполнении условий теоремы **7.1** *»и совпадении магнитной и массовой симметрий тел потенциальная энергия магнитного взаимодействия является функцией угловых координат вида* **(7.1),** *т. е. зависит только от разностей угловых цилиндри-*

ческих координат и углов прецессии как аргументов тригонометрических функций.

Следствие. **Теоремы 7.1, 7.2 справедливы для гравитационного и электрического взаимодействий. Это следует из того, что, как и для магнитного случая, потенциальная энергия гравитационного и электрического взаимодействий также определяется интегрированием функции расстояния между элементарными источниками поля. Поэтому названные теоремы относятся ко всякому взаимодействию в классической физике.**

§7. 2. Приведение в задаче двух магнитов [33]

Изучим сначала более простой случай двух свободных тел с потенциальной энергией вида (7.1). Согласно теоремам 7.1 и 7.2 это может быть любое взаимодействие классической физики (гравитационное, электрическое или магнитное) или их комбинация (гравитационное + магнитное и т. д.). Тогда из формулы кинетической энергии

$$T = \pounds (\mathrm{p} + \mathrm{p?o?} + \copyright + 4\text{-}Al(\blacklozenge, \sin, + \quad (7.4)$$

$$+ 4\text{-}\,C\,(\phi< + \,\%\,\cos\,(\,\bullet\,\text{-}\,\text{-}J\text{-})$$

и уравнений Лагранжа

$$d\,\text{Л}\;\text{-}L$$

((- !, 2) следуют исходные дифференциальные уравнения $\text{г}\;\text{-}ш$ (7.5)

$$\mathbf{m,p} = m_t p^x \text{—} \quad ,$$

$$a\,.\,{}_{\text{г}}{}_k\,ou \quad (7.6)$$

$$(\mathbf{mp"cti}) = \blacksquare \text{—}\;\text{-}J5;\,.$$

$$\text{-}t \qquad Л1 \quad (7.7)$$

$$= \text{—}\;\text{-}3\Gamma\text{'}$$

$$= \text{-}g\text{-}\,(At \text{—}\, C\,\phi/\,\sin 2Of \text{—}\, C_{(}\phi\phi\,\sin 0/ \text{—} \quad (7.8)$$

$$d\,\ldots \qquad , \qquad \text{———}\;\text{—} \qquad \bullet\text{Ч/} \quad (7.9)$$

$$(\mathbf{Aiy}\,\sin^2 oi + \bullet\, Ct\,(\phi/ + \qquad \cos Of \cos o/| = \text{—}\,\text{——} \quad (7.10)$$

$$\text{-y-}\;[C< (\phi/ + \phi\,\cos\,o/)| = \text{—} \qquad \bullet$$

Система (7.6) — (7.11) достаточно сложна Поэтому целесообразно найти интегралы движения, чтобы сократить число переменных.

Для нахождения интегралов движения используем вначале тот факт, что потенциальная энергия U является функцией координат вида (7.1). Тогда, сложив уравнения (7.7) и (7.10), в правой части получим

$$\frac{dU}{\text{зоа}'}\,\frac{_\,\text{дЦ}\,_\,\text{ди}\,_\,\text{ди}}{daa\ \text{<h)i}}\ \text{djj, *} \qquad \textbf{(7.12)}$$

Но из (7.1) следует

$$\text{»}\quad -\frac{U}{\partial(\text{ъ}-\text{aJ}}\,,\ \text{I}\ \frac{U}{^(\text{ф},-\text{a})}\ \text{f}\ \text{n}\ \text{I}\ \frac{dU}{'}\ ,$$

$$\text{*4}\quad \frac{dU}{d(ai-\text{a,})}\text{*(-D+}\ \frac{dU}{\text{a (ф— a,) '}}\ {}^{t}\ \frac{14}{\text{' +■ d (J. — aJ}}\ \frac{dU}{}\ —$$

$$\text{Oj}\qquad \text{•(1).} \qquad \textbf{(7.13)}$$

$$\text{” <((| — Ф2 ‘}\qquad \text{■* <(Ф1— a}_{t}\text{) ■}\qquad {}^{+}\text{д(ф,— a,)}\qquad '$$

$$M\,.\qquad ,\ {}^{n.}\ \frac{*L}{}\qquad ,\ \text{■}\ \underline{\text{at/}}\ .$$

$$\text{'a^i ' a (Л| — xa i ' ”* a(}\text{^}_{s}\text{—at)}\qquad *\text{'' a (ц, — a,>}\qquad *\text{•}$$

Взяв сумму обеих частей написанных равенств, видим, что в правой части все члены взаимно уничтожаются. Поэтому (7.12) — тождественный нуль. Это означает, что сумма левых частей уравнений (7.7) и (7.10) как полная производная по времени некоторой функции обобщенных координат и скоростей также тождественно равна нулю.

Тогда сама функция является постоянной, т. е.

$$M = \text{V}\ mpaц + \text{• Лф* sin* O,} + Ci\ \text{(<p< + ф£ cos d<) cos б,} = \text{const}$$

(7.14)

— интеграл движения. Этот интеграл обобщает интеграл площадей |45, §. 14].

Далее, из уравнений (7.11) как следствие цикличности углов собственного вращения < следуют еще два интеграла движения — моменты импульсов собственного вращения:

$$\text{Mi} = Ci\ \text{(ф, + ф(cos \$<) = const}\ (i = \text{I, 2}). \qquad \textbf{(7.15)}$$

Если подставить (7.15) в (7.14), можно исключить скорости > в интеграле (7.14):

-

$$M = \text{J]}\ mpta\ \text{4- Лфг sin’ O/} + Mi\ \text{cos di} = \text{const. (7.16) C}$$

Теперь целесообразно произвести замену:

$$\text{a, — a, = a, фх— «a = P, ф, — a, = y,} \qquad \textbf{(7.17)}$$

$$\text{ax — Og = a, фх— a}_{\text{a}} = \text{P, ф}_{\text{г}} \text{ — a, = } y. \qquad \text{^Л))}$$

Через три новые координаты а, р, y, используя (7.17), можно выразить комбинации старых угловых координат ах, а,, ф$_{\text{ь}}$ ф*

в правой части (7.1):

$$Ч —a,=Ᵽ —a, ф—a»—a + y. ф — ф — Р—a — y. \quad (7\ 19)$$

С учетом (7.17) и (7:19) энергия (7.1) станет функцией вида

$$U = U, (ft, C - *i. a, P, V) (» = 1. 2). \quad (7.20)$$

Исключение скоростей a„ if, может быть осуществлено таким образом. Переписав (7.16) в виде и записав еще три соотношения:

$$\underline{32}\ (mреи + Аф, \sin^8 o,) = M — \quad Л_1, \cos O, = N \quad (7.21)$$

$$a, — o» = “• if, — if» = P — a—У, ф, — a» = p, \quad (7.22)$$

вытекающие из (7.18), получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных a„ ф, (i — 1, 2). Эта система имеет единственное решение:

$$«_1 = (Г\ [N + (Q, + B,)\ a - B,p - B»y],$$

$$a, - O''_1|Л - (Q, + B,)\ a + Bp - B,y|,$$

$$ifi - <T'\ [N — (Q, + B_г)\ a + (Q, + Q, + B.)\ p - B,y], \quad (7.23)$$

$$ф - <T'\ IN + «_г, + B,)\ a — B,P + (<2 + Q, + B,)\ y],$$

$$Qi - m,p?, B_t - Л, \sin» O_{(.}\ Q — Q, + Q, + B, + B_2.$$

До сих пор мы полагали, что система отсчета 0£т]£, относительно которой изучается движение двух свободных тел, является произвольной инерциальной Пусть она совершает поступательное движение вместе с центром инерции системы двух тел. Тогда на основании закона сохранения импульса замкнутой системы получим

$$£\ m\& - 0, \quad — 0, £\ m\& — 0, \quad (7.24)$$

(—i =i ш где т„ £, — декартовы координаты центров масс О, каждого из двух тел.

В связи с ограничением на систему отсчета 0*|^£ целесообразно произвести замену линейных координат

$$E| — Ь(X, if = Ь)y, — Ьa \quad (7.25)$$

и подобрать постоянные t>, таким образом, чтобы условия (7.24) выполнялись тождественно. Очевидно, при этом должно выполняться соотношение

$$+ m\phi = 0. \quad (7.26)$$

В дальнейшем будем полагать, что > 0. Тогда, очевидно, f» < 0.

Если г, ф, z — цилиндрические координаты, соответствующие декартовым координатам $x, y, г,$ замена (7.25) и условие (7.26)

эквивалентны тому, что

$$\text{Pi} — \text{V. P»} = — V. £ — \& = Ьг, \qquad (7\ 27)$$

$$\text{а ав л = const, а —• о,}$$

где $Ь — b_t — Ь, —$ const > 0.

Как и следовало ожидать, в системе отсчета, связанной с центром инерции системы двух тел О, центры масс тел О, и точка о находятся на одной прямой

Используя (7.27), (7.28), можно произвести дальнейшее сокращение числа переменных.

Действительно, из (7.27) следует, что вместо р, и р, можно ввести координату г, вместо £, и £» — координату $г,$ а координата а есть интеграл движения.

Поэтому потенциальная энергия системы (7.1) может быть представлена функцией шести новых координат:

$$U = U, (г, 2, б,, 0,, р, у). \qquad (7.28)$$

Используя (7.27), можно упростить формулы (7.23). Теперь они приобретают вид

$$a, -a, \sim Q\sim\text{‘}(H$$

$$\text{th -} <T\text{‘}\ [N + (Q, + Q, + B, \text{р — В,т|}, \qquad (7.29)$$

$$\Phi^* = [N — ad + (C1 + + Bl)\ т)$$

и могут быть использованы для сокращения числа скоростей Подставляя (7.29) в (7.4) и выполняя преобразования, получим

$$T — \text{р}\ (2\ 4\text{- г}^1) + -g\ A,0i + -_2\text{-}\ Ab\ \text{-J-}$$

$$\text{, 1}_____ AA^{8>n*}\ \text{Of}^{s*n*\ л}_____\ \text{ы}$$

$$\text{2 (W-' } A_t\text{ .in*O}_l\ \text{XjSin'O,}$$

$$\text{X} \qquad \text{V-}^2\text{Pv) +} \qquad (7.30)$$

где учтены зависимости (7.27), а для $F,$ р справедливы формулы

$$\text{• <}^7\text{-з”}$$

$$\text{р} — щЬ] + mЬ \qquad (7.32)$$

Существенно, что после перехода к новым координатам и скоростям кинетическая энергия оказалась зависящей не более чем от шести обобщенных скоростей (г, $г,$ б,, б,, р, у). Кроме того, в результате перехода к новым переменным появилось слагаемое F $(г.$ б], б,), зависящее только от координат. Как и в задаче о движении точки в центральном поле [45, § 14|, оно может быть отнесено к потенциальной энергии.

Таким образом, имея первоначально динамическую систему с 12 степенями свободы в силовом поле с потенциальной энергией (7.1), благодаря интегралам движения M, M_t, M можно в два раза сократить число координат и скоростей и получить приведенную динамическую систему с шестью степенями свободы.

Кинетическая энергия приведенной системы есть (7.30) без слагаемого F (г, $0_ь$ $б_я$). Это слагаемое добавляется к потенциальной энергии приведенной системы

$$U = U_t(r, г, O_{,}. p, y) + F(r, 0б_8), \qquad (7.33)$$

причем Ut (г, г, 0_{lt} $б_8$, р, у) —функция, получаемая из (7.1) заменой старых координат новыми по формулам (7.17), (7.19) и (7.27).

Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.3. Задана двух свободных тел в произвольном силовом физическом поле в случае совпадения динамической симметрии тел и симметрии источников силового паля приводится к задаче одного свободного тела.

Частным случаем теоремы 7.3 является приведение задачи двух материальных точек в центральном силовом поле к задаче одной точки (см., например, [45, § 131).

Уравнения движения приведенной системы могут быть получены из (7.30) — (7.33), уравнений Лагранжа (7.5) и потенциальной энергии силового поля, которая также должна быть заданной. В частности, для двух свободных тел с магнитным взаимодействием двух идеально проводящих токовых колец уравнения приведенной системы в безразмерной форме имеют вид

$$X| = n \qquad x_t\, Ifi + T^t(c_i \sin^2 O/p' \; 4\text{-}\; c_t \sin^8 OsP'Vk$$

$$Xi — n \qquad (J^{-1} = xt\ 4\text{-}\ cj\ sitf\ ft, + c\text{^}8\ sln8\ O_8, x_t — rl\sim, x_8 = *f\text{“}').$$

$$Oi = -J^{\sin}\ 2o1\ (/, 4\ fl) — m\text{^}'fi \sin o) — «I\ Jj\text{-}.$$

$$= -y\text{-}\ \sin 2©8\ (/? + fl) — m\&'fa \sin ©, — n.,\text{-}\text{^}.\ ,$$

$$P'' = — \qquad \{[c_8 \sin^8 ©g*j\ 4\ (x?\ 4 <i \sin^8 6t)\ x, \operatorname{ctg} б_S©21\ P' +$$

$$4\ c, \sin 8\ 6, (xi — *i \operatorname{ctg} 0_8©2)\ /\}$$

$$V_e — 2''JxT\ \{[c \sin^8 ji\ 4\ (x?\ 4\ c_8 \sin^8 o_2)\ x_t \operatorname{ctg} Mil\ v' +$$

$$+ c_8 \sin^8©_8 (XI — X \operatorname{Ctg} ©>©1)\ P\ \}\ \text{---}\ \text{——}\ t)\text{–}\ \text{--------}\ \text{------}\ \text{-----}\ *2\ p\ ■$$

где n = 64l $(p?>L,,y$ fa — 6/) (I — 6^) (1 — ^)“‘ — отношение характерной магнитной силы к силе инерции; Л<= $^{n}\text{^}t\ U$ ~

= 1,2) — отношение характерной магнитной энергии к кинетической энергии системы; $c = A$, (p(2)-' ((== 1, 2)— отношение центрального момента инерции относительно оси, перпендикулярной магнитной оси тела, к характерному моменту инерции системы (p — приведенная масса; I — характерный линейный размер); m;= M_t X X (p/Гш)-' (t = 1, 2) — отношение момента импульса собственного вращения к характерному моменту импульса системы (to — характерная угловая скорость вращения; т = ut — безразмерное время, ' = $d!dx)\ 6 =$ $^{ii}№\ '$, Г = V*Ф« $(LuLu)^4$*. Для f. L_{it} справедливы формулы

$$Lu = \text{Po°<At. Д, - ln-}^{\wedge} + \text{X } (I - \text{1.2}). \qquad \text{(7.35)}$$

ап 2я

$$/ = \text{J } dp\ j \text{ (sin 6, sind}_s \text{ cos 2tp}_1 \text{ cos 2tp}_a \text{ — cos (P — y) x}$$

0 I

$$\text{X (sin 2qpi sin 2ф}_2 \text{ f cos 6j cos d}_8 \text{ cos 2tpx cos 2ф}_a) +$$

$$\text{f (cos 6}_8 \text{ sin 2tpt cos 2tp}_8 \text{ — cos 6, cos 2 <p}_t \text{ sin 2 ф}_2) \text{ sin (o — y)| x}$$

$$\text{x } (t^8\ (xi + \quad + b^* + b\% + 2bx_t \text{ (&! (cos 0, sin P sin 2ф1 —}$$

$$\text{— cos p cos 2фO 4- } b_t \text{ (cos 6}_8 \text{ sin y sin 2<p}_2 \text{ — cos y cos 2ф}_8\text{)] f}$$

$$+ 2bx_t\ (bt \text{ sin o, sin 2ф1 — } b_s \text{ sin o}_8 \text{ sin 2ф}_8) + Ibb \text{ |(cos 2ф}_(\text{ cos 2ф}_г +$$

$$\text{+ cos dj cos d}_2 \text{ sin 2ф}_1 \text{ sin 2ф}_8\text{) cos (P — } y\text{) f (cos 0}_2 \text{ cos 2ф, sin 2ф}_г \text{ —}$$

$$\text{— cos 6, sin 2 ф}_1 \text{ cos 2ф}_г\text{) sin (P — } y\text{) — sin 6, sin o}_8 \text{ sin 2 ф, sin 2фа]} \text{ —Мф,,}$$

(7.36)

$$\text{b, } = aГ^4,\ b.. - ojr',$$

где a_t, ф, = const — радиус и полный магнитный поток токового кольца толщиной $d(\backslash$ Л — лондоновская глубина проникновения. Формула (7.3б) получена заменой исходных координат координатами приведенной системы в формуле (5.2).

§ 7. 3. Обобщение на случай n тел

Опишем n свободных динамически симметричных тел в осесимметричном силовом поле 6м координатами: р*, $a_к$, tk Й*. ф*, ф*; k — 1 ..... n (р, a, £ — цилиндрические координаты центра масс:; б, ф, ф — углы Эйлера, причем 6 — угол нутации, ф — угол прецессии, Ф — угол собственного вращения вокруг оси симметрии поля). Тогда по теореме 7.2 потенциальная энергия U будет функцией координат вида (7.1), т. е.

$$U\text{-}u\text{(р*, С*, 6*, '^(а* — фт), }^{\text{С}}\text{?S(%fc — Фт), cos (а* —а}_{\text{СТ}}\text{)l, '} \qquad \text{«««n}$$

cin l

(7.37)

$$k,\ m = 1, \ldots n.$$

Для уменьшения числа переменных произведем сначала замену Р* cosa* =

$$\text{V cos ft, } £^* = \text{V } a_{ui}H_t,$$

$$'=' \qquad \textbf{(7.38)}$$

$$Рк \text{ sin a*} = \text{y } a_{lt}r, \text{ sin ft} \qquad (\text{Л} = \text{I, ... n})$$

и подберем постоянные $a,$ **так, чтобы закон сохранения импульса в системе центра инерции удовлетворялся тождественно и чтобы сумма п членов** m^* **(р* + + р* а* + й) превратилась в сумму (п — 1)-го члена р<-** $(г? + г)\ X$ **X pf + z?) Для этого должно быть**

$$\text{У } ткж \text{ cos } a^* — \text{O}, \quad \text{У } Шкрк \text{ sin } a^* = \text{O}, \qquad \textbf{(7.39)}$$

$$\underline{\text{V}} \text{ Torn.- 0, £ } аицДн = 0, \text{ р, — у, т*Д?*; I, / = 1,}$$

$$n— 1.1Ф\ I- \qquad \textbf{(7.40)}$$

Замена (7.38) преобразует (7.37) к виду, содержащему разности координат, но только вместо л углов а* теперь будет (г — 1) углов ft. Так как кинетическая энергия

$$27 = £1\text{pAг? + } Л \text{ 0? + г?) + 2} \qquad \text{sin}^{\text{!}} \text{ ♦*) +}$$

$$+ C, \text{ (<t + \% cos \#*)2]} \qquad \textbf{(7.-41)}$$

(Pt, $A^*\ C^*$ **— приведенные массы и центральные моменты инерции) не зависит от углов Р,, ф*, из уравнений Лагранжа следует интеграл момента импульса:**

$$M = £ \qquad + £ \text{ Mi-n^ + } y\ M_k \text{ cos O* = const. } (_7 \text{ 42^}$$

$$b_f — ptr? \qquad (1 < i < n — 1),$$

$$b_t = Ai—,+1 \text{ sin}^8 \text{ Ф/—-л} \qquad (n \qquad — 1),$$

где учтены интегралы $M^* = C^*$ **(ср* +- % cos** $б^*$**) = const** $(k = = 1, ..., n)$**, обязанные цикличности углов ф*.**

Произведем далее замену

$$\text{Р1 — Р. - Yu Р, — Р» - V,.....Р—1 — Ф1 - Т»-I. Ч>, — Ф, - } tn,$$

$$\text{ф, — Ч> - Уп+..... Ф—i — Фл - Y»-s,} \qquad \textbf{(7.43)}$$

и относительно ру ф* разрешим систему уравнений, включающую (7.42) и продифференцированные по t **равенства (7.43). Это решение**

единственно (определитель системы

$$A=Vb_f \qquad (7.44)$$

не равен нулю), так что в (7.41) с учетом интегралов M_A возможен переход от скоростей jf, к скоростям y_v (v = 1, . $2n$ — 2). Переход к углам y_V в (7.37) осуществим с помощью (7.38) и (7.43).

В итоге сокращения числа переменных получаем искомые формулы:

$$4\text{- -g- } \underline{У,}\ Щ\ (Л^2 + г?) + \text{-у } \underline{У,} \qquad (7\ 45)$$

$$У' - U_t(r_t, it, Tv) + \text{-у } {}^{W_{-};\,1\ "\ 1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots{}^{n_{\sim}\ 1:}$$

$$й = 1, \ldots. n, \qquad (7.46)$$

$$v, / = 1, \ldots, 2п — 2; N — M — у M_K \cos$$

где u_K — энергия (7.37), в которой исходные координаты р*, *а**, *£**, ft_k, ф*. Ф заменены координатами r_{lt} *г/* Tv-

Теорема 7.4. Система n свободных динамически симметричных тел в произвольном физическом силовом поле, обладающем осевой симметрией, приводится в системе с 4 *(n* — 1) *n степенями свободы.*

В частном случае n = 2 формулы (7.45), (7.46) переходят в (7.30), (7.33), а приведенной системой оказывается свободное тело в силовом поле.

Используя (7.45), (7.46) и уравнения Лагранжа, можно получить уравнения движения приведенной системы. Записанные в форме, разрешенной относительно старшей производной, они имеют вид

$$+ Д\,ДО(m = 1$$

$$<^{m=1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{“>•} \qquad (7.47)$$

$$^{=}\ \text{“ V “ } \sim_2 \wedge \{АГ^2 — NM_V \sin (M -$$

- Т"[(* -1Л)' -Л£.‘Ф‘ 2 а ш’[(д -к ”) x (д — jc д (д — vf

Р.-Р,} (v _ 1.....и).

Р- = (Ь,Ь,+Л~' ((&+& -Aw) x

х[£Ъл-Х’(л-£ »>.]-

—"k+i (д—— &•)&. —* +

+ЛК т^Ь-^0,+*,+■> Ж+ь Жт]}

в- 1 ..... 2n - 2),

6, = Ц,Г? (!<!<« — 1),

6(= Д^, sin® o,_n+i (n с l< 2n — 1).

§ 7. 4. Приведение системы без циклических координат

Используя технику предыдущих параграфов, можно сократить число переменных в том случае, когда исходная динамическая система не имеет циклических координат (случаи несовпадения динамической симметрии и симметрии силового поля).

Рассмотрим с целью более простых выкладок случай двух сво бодных тел в силовом поле с потенциальной энергией вида (7.2). т. е.

$$U = \frac{\Gamma}{L} \sum_{i,k=l.\,2} Ci.\ \text{G/. sjn (“' — Ф*’ “» (Ф‘ — Ф*)’cos (“,—«*) <p , (7.48)}$$

По сравнению с изложенным в § 7.2 особенности начинаются с того, что в правой части (7.11) уже будет не нуль и *Ф*® не являются циклическими координатами). Произведя замену угловых коорди нат (7.17), вместо системы уравнений (7.29) получим

$$\begin{aligned} \text{а, = «J = Q"' (M — C, cos Ф,<p, _ } & C® \text{ cos } ф_2ф_3 — \quad — B_2y), \\ \text{4> = } Q & \text{ (M — } Cj \text{ cos ф»ф, _ } C_8 \text{ cos } Ф_2Ф + (О_з + B_8) \$ — B®y], \\ \text{ф = } & \text{"Д1 — cos ф.ф1 — } C_8 \text{ cos ф®ф® — } Bp + (Qo + Bj\ y], \end{aligned} \qquad (7.49)$$

где

$$0o = |*Л,\ Q = Qo + B1 + B®,\ B_t = A_l Siif‘\&_i + Qcosj\ (t = 1,2) \quad (7.50;$$

Подстановка (7.49) в (7.4) дает кинетическую энергию приведенной системы:

$$2\Gamma = 2C, \cos O.\Phi.Ц + 2C, \cos e,фy> - К!"' Aif> + ^,T)> X$$

$$X (C\backslash \cos 0,ф, + Co \cos O,ф.) — Q\sim' (C, \cos 6,ф, + C,\cos б„ф_a)_r +$$

$$+ Bp + вJv - Qт' (B,P + B_aV)^{i} + t ". (pi + Й) +$$

$$+ Apt + C,q,. \qquad (7.51)$$

Потенциальная энергия приведенной системы будет иметь вид

$$U = A, (рь £t. A, P. V. ФМ + F (Рь A) 0= !. 2),$$

$$f (pi, p> «1, °t> = 4-<2!"'Л1^2 = 4*M^Z (m^ +^p+ +$$

$$+ Aj \sin^8 A + Ci \cos^* 6, + A \sin^* O^* + C_s \cos^8 dj'^1, \quad (7.52)$$

где U_8 **(p„ £, p, y, ф,) (/ = 1,2) — потенциальная энергия (7.48), в которой старые координаты заменены новыми по формулам (7.17) и (7.19). Член** $F <p_ж, p_a,$ **(. () в (7.52)— зависящее только от координат слагаемое, появившееся в результате замены переменных в формуле кинетической энергии и отнесенное к потенциальной энергии приведенной системы.**

Приведенная система с кинетической энергией (7.51) в силовом поле с потенциальной энергией (7.52) получена в произвольной инерциальной системе отсчета. Если использовать систему, связанную с центром инерции двух тел, нужно заменить p„ p_8, £„ C* на r, r по формулам (7.27). Это очевидным образом изменяет выражения (7.51), (7.52), что здесь не выписывается.

Уравнения движения приведенной системы, записанные в форме, разрешенной относительно старшей производной, с учетом (7.5), (7.51) и (7.52) имеют вид

$$"ip(\text{ ----- ----- -------} м= \qquad d_{=i\,2}),$$

$$AP i \text{ -------} ШТ^{+} \text{ ' } \Gamma,\sim W\text{-) } OT^2 [T (At — c,) (F, _ QX, 1 \sin 20, +$$

$$+ QC, \sin 6,ф, j\text{----}j\text{-}^{M}\text{‘ } (Ai— C,) Q\sim 2 \sin_{2в(}$$

$$(< = l, 2; X, = Pi, X, = y), \qquad (7.53)$$

$$4f |C,»,\text{ - } (T,\text{- } C»,) ^C, cos»,) \text{ ----------}«C._{G=} !, 2),$$

$$■y (B,X, - (B,F\backslash Q\text{-}' - C, \cos 6,ф,)1 = - \qquad = 1, 2),$$

$$A = £c,\cos Oф, + B.7\text{-}_t (X, = p, x, = y),$$

Глава 8
УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОГО ТЕЛА В МАГНИТНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

§ 8. 1. Равновесие соосных колец

Магнитная потенциальная яма (см. гл. 4) представляет интерес для достижения устойчивого равновесия свободного тела в неуправляемой магнитной системе при наличии силы тяжести. О возникающих при этом возможностях дает представление задача магнитной «подвески» в системе двух идеально проводящих токовых колец. Это задача об устойчивости равновесия свободного токового кольца, нагруженного силой тяжести G, в магнитном поле неподвижного токового кольца. Отметим, что свободное кольцо обладает шестью степенями свободы и минимум магнитной энергии по расстоянию между центрами колец (см. § 4.4) не означает, что имеет место минимум по всем координатам свободного тела.

Будем исходить из уравнений движения свободного тела, описываемого цилиндрическими координатами центра масс р, *a*, Z и углами Эйлера б, ф, <, определяющими его угловую ориентацию (углы Эйлера введены так, что ось собственного вращения является магнитной осью свободного токового кольца) Такими урав нениями являются уравнения (7.6) — (7.11) с опущенным индексом t, где к магнитной потенциальной энергии, определяемой формулой (5.5), необходимо добавить член ±G. £, учитывающий силу тяжести: т. е. когда кольца соосны, а их плоскости удалены на расстояние Со = *h*, выполняются

U* - 4(Т!„- И*,»,!„ + Ч'У-„) (L„Z.„ - *&Г'* ± ОТ (8.1) В этой формуле L_n, *LM*, 4\, *^r2, *G* — заданные постоянные, а зависимость от координат свободного кольца дается выражением (5.6), в котором индекс *i* можно заменить на 1, а индекс / — на *2.

Знак «минус» отвечает направлению силы тяжести в положительном направлении оси 0£ (£ — вертикальная координата). В этом случае сила тяжести стремится сблизить кольца, т. е. появляется магнитная «подушка». Наоборот, знак «плюс» относится к магнитной «подвеске», когда сила тяжести направлена в сторону увеличения расстояния между токовыми кольцами.

Если выполнено одно из двух условий $\partial ОЩ|_{o} \pm$ **G = 0** **(8.2)**

в точке $q = q_{,}$**:**

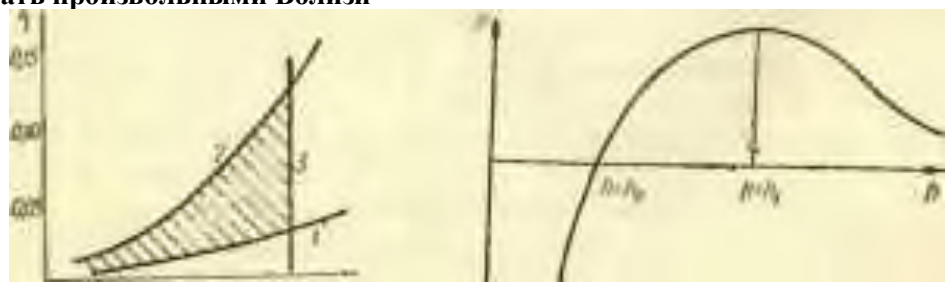
р в О, С- Со — const. ^{a} **— Ф = -у** p **= £ =** **# = 0, ф = фо = const,** **(8.3)**

О, а = ф = б = ф = 0, **необходимые и достаточные условия существования равновесия (равенство нулю сил и моментов, действующих**

на свободное тело) Физически эти условия означают, что сила тяжести свободного кольца уравновешивается магнитным взаимодействием кольцевых токов. В одном случае мы имеем магнитную подушку (свободное кольцо находится над неподвижным), в другом — подвес (свободное кольцо расположено под неподвижным).

§ 8. 2. Достаточные условия устойчивости равновесия

Введем малые возмущения координат р, £, б, a — if, *1 — р. = £ — (Л + /). $X4$ = 0, $Xy = x_г$ — х», а возмущения $Xг, Xв, Xв$ координат а, if, <р будем считать произвольными Вблизи



Q5 06 *0, К*

Рис. 24 Рис. 25

соосности токовых колец потенциальная энергия может быть разложена в ряд по малым $Xy, x_я, Xв, x^{\wedge}$.

$$U = 4'' \, ^{u\circ\circ n} * + 4'' \, U * x < + 4'' \, ^{u} mxЛ + 4'' \, ^{U} wX7 + UvoXyXB, \qquad (8.4)$$

где $У$рр, ... определены выше (см. § 5.2).

Согласно теореме об устойчивости по отношению к части переменных [67] устойчивость равновесия (8 3) по отношению к о, £, Ф, а — if определяется положительностью формулы (8.4) при малых $x_„ Xв, Xв, Xy$ и любых $x_л, Xь Xв,$ что сложным образом зависит от ряда параметров системы (Л, т, ц) Для наглядного объяснения области устойчивости (точки заштрихованной области на рис. 24) воспользуемся качественным графиком магнитной силы от расстояния h между соосными кольцами (рис. 25)

Кривая / на рис. 24 построена по уравнению т $= y$ Ей отвечает магнитная потенциальная яма или нуль магнитной силы (точка $h = h_o$ на рис. 25). При т > $У$ сила P имеет характер притяжения, при т] < y — характер отталкивания В обоих случаях можно удовлетворить необходимому условию существования равновесия (7.2), взяв U_t в виде U_9 = -fG£ или = —Gt. Но Up > > о только при т) > y (точки, расположенные выше кривой / на рис. 24), что эквивалентно возможности достигнуть устойчивости в системе a магнитным притяжением, но не с магнитным отталкиванием Поэтому вывод об устойчивости равновесия свободного тела в системе двух магнитно отталкивающихся сверхпроводящих контуров (80) ошибочен. Одномерная модель, принятая в (80J для описания свободного тела, «спрятала» возникающее при т)< $У$ неравен-

ство $Upp < o$. **Это неравенство означает, что возникает неустойчивость в направлении, перпендикулярном линии действия магнитной силы. Отметим в этой связи также работу 1Я5], где вывод о неустойчивости двух магнитно отталкивающихся контуров делается на основе наглядного качественного анализа.**

Из графика на рис. 25 следует, что жесткость магнитной опоры положительна на участке оп h **до** h_t, **где достигается максимум силы магнитного притяжения На участке** $h >$ **очевидно, устойчивость в направлении силы тяжести не может быть получена** $(U \sim i < 0)$. **Кривая** 2 **на рис. 24 построена по уравнению Сц = 0, причем** $Uit > 0$ **для точек ниже этой кривой Поэтому область устойчивости находится между кривыми** 1 **и** 2.

Местоположение вертикального отрезка 3 **на рис. 24 определяется уравнением S =** $U\& Utn — U =$ **0, причем неравенство S < 0 выполняется для точек, расположенных справа от отрезка, неравенство** $S > 0$ **— для точек, расположенных слева от отрезка. Положение отрезка** 3 **зависит от маятникового тела 14]. В частности, если маятниковость отсутствует** $(1 — 0), km$ **- » 0,73 (36]. Положительная маятниковость (т > о,** $I >$ **о) сдвигает отрезок** 3 **на рис. 24 вправо (область устойчивости увеличивается), отрицательная маятниковость (т < о,** $/ <$ **о) сдвигает отрезок** 3 **влево и сужает область устойчивости.**

Исходя из формул (5.11) — (5.13), получаем приближенные достаточные условия устойчивости равновесия (8.2). В частности, при малых ***k'***

$$UppUw\text{« дт}| — 1 + 4\text{тs} — \text{s in } y] + 4\text{т (т} + kk\text{ ')} \text{ x}$$

$$\text{X ' 1------- y- } S \text{ -4- 3s in } y) \bullet$$

$$[\text{sf 4тЛ'(—1 — s — 3s in } y) + + 4\text{т* (1 s 4- 3s}$$

$$\text{in y)J, ---------- (8.5)}$$

$$\text{S} = \quad — 1 + — y^s + 4\text{тЛ' (1 — 6s) j, } S = k, y = —$$

При наличии положительной маятниковости (т > 0) положительность S для устойчивости равновесия маятника в системе близкорасположенных соосных колец (Л' = Ks-*,о) обеспечивается выполнением неравенства 4т£' (1 — 6s) + -y s >1 С точностью до s это эквивалентно простому условию “

Ш > -**J**-**.** **(**8.6**)** ‡‡

‡‡ **Требование > О дает** ***t*** > **-j-, что при малых** ***k*** **и выполненном условии (В-6) удовлетворяется**

Если бы не было маятниковости (*ε* = 0), то *s* > 1 или *k* < К7/3» « 0,88, что близко к значению ft » 0,73.

Для выяснения условий устойчивости с отрицательной маятни- ковостью, исходя из (5.15), запишем

$$\text{ж}^{1}\ ''j\ 3s^{*}\ 12 — s + 12ftx\ (ft'\ 4\text{-}\ ftt)\ (1 + \qquad s)],$$

$$(''«==|\text{-}йТ^{9}Нт+^{2}Ч^{1}+т^{s})+^{4s\text{т}}(‘ + т^{s})|\text{-}\ ^{187}>\ 3s+l8b(l + 4\text{-}s]j$$

При малых $ (ft-*■()) из условия s > О (5.11), (5.13) получим

(8-8)

Если бы не было маятниковости, из условия s > 0 должно было бы быть $ < , . что выполняется. Из условия Дее > 0 следует s <-|- или ft =Ks < |/0,89, что близко к значению ft «= 0,73.

Отметим, что линии *1* и *2* на рис. 24 отвечают частному случаю Л = 5 в формуле собственной индуктивности кольца *L* = щаД. Для других значений Д их качественный характер сохранится, а местоположение отрезка *3* от Д не зависит.

§ 8. 3. Об устойчивости равновесия других магнитных систем

Поведение магнитной системы существенно зависит от числа, формы и относительной ориентации идеально проводящих контуров. Рассмотрим особенности устойчивости равновесия в системе не двух, как это было сделано выше, а трех идеально проводящих контуров (381.

Если все три кольца свободны, используя технику приведения (см. гл. 7), можно получить следующие выражения кинетической *T* и потенциальной *U* энергий приведенной системы:

$$2Г\text{-}£\ A\& + S\ Н\ И + Я)Д\text{-}' + £\ (lAVv +$$

$$4\text{-}\ 2Д\sim‘\ (?Л\ (to» 4\text{-}\ toa\ 4\text{-}\ to<) +$$

$$4\text{-}\ (too + to«) + TsY.Mjk \qquad (8.9)$$

$$Z/ = t/_{2}\ (r_{„}\ z_{t},\ Tv) + 4''\ Д_'\ (М — “s\ а‘) \bullet$$

$$Л4, M_{h} — \text{const},$$

^ = ц/(»=1,2>, 1, = X, Ц- 4,$_s$in®<h. M ^ + ^,sin^{s}a$_t$,

^! = X_4 — Xi + 6$_{<t}$ ^$_2$ —6j —6$_S$ =/IgSin'ftj 4-

+ ^sin^2 fl$_a$, 6$_4$ = A_a sin^2 o„

Д = S ц^ + £ Л*51П^{r}е*-

<='

Здесь ц$_i$ — приведенные массы; Л* — центральные моменты инерции тел относительно оси в плоскости кольца; *M* и М*— интегралы движения (соответственно сумма импульсов по а*, % и три импульса чистого вращения); U_a (r_{it} z_{lt} А*, y_v) — потенциальная энергия исходной системы, где осуществлен переход к новым координатам по формулам

p$_{fe}$cosa$_{fc}$ = S orAfiCosPj, p$_k$sina$_A$— <i,»r$_($sinp$_($, S

(8.10)

—Pi 4- P» = Vi. —Pa + Vi =Ya. —Ф. + = %■ —Фа + Ф» = V«

1, 2, 3),

причем $a_{1к}$ = const и

m = S

Потенциальной энергией исходной системы является сумма энергии магнитного поля, выраженной через потокосцепления *'V„* и координаты, и энергии гравитационного поля *G* (г, 4-г,):

У, = G(z, 4- z,) + -y- 11 — {*f* + (1 — У*) *P,* + (1 — *уЬ P,* +

+ 2p, (У«Ув — *Ух)* + 2p$_r$ (y^a — y_a) 4- 2p,p$_s$ *(ум — $y_я$)1(1 + 2y,$y_2$$y_a$ —*

— *ffi* — У^2— У3)~'» (8.1 li

y, = L$_{14}$L-', y_t = L$_{1S}$L'^{1}, *y,,* = Z.^-^{4}; $_{Pt}$ = УДТ^1. $P_{ŭ}$ = W.

где

2л *in*

*L** J *d(p$_k$* J (cos 2<p$_v$ cos 2<p» sin sin o, 4- (sin 2<p$_v$ sin 2<p,. 4-

4- cos 2<p$_w$cos 2<p$_{fe}$ cos <h> cos cos фу» 4- (cos 2q>$_v$ sin 2<p$_{ft}$ cosO$_v$—

— sin2<p$_v$cos2<p$_A$cosO$_{fe}$)sin фу») {Sir? 4- *B%r?* + 4-

4- *(B$_t$Z* + *B&p* 4- *2a(B&* 4- *B^*(sin 2<p$_v$sin <K — sin 2<p$_{ft}$ sin o») 4- 4- *2aB,r,*

(cos 2tp$_v$ cos (tv — M — cos 2<p$_{fc}$ cos (ф* — pj —

— sin 2<pv sin (ф$_y$ — pj cos e$_v$ 4- sin 2<p$_b$ sin (% — Pj cos O» | 4- 4 - *2aBy$_a$*

[eos 2<p$_v$ 60s (ijiv — Ps) — sin 2<p$_v$ sin (фу — p,) cos d$_v$ —

— cos 2<p* cos (% — pj) + sin 2<$p_л$ sin (% — Ᵽ,) cos 0*| 4

4- 2e' (1 — (cos 2q_x cos 2ф* + sin 2<v si n 2q*cos d_v cos *0*) cos i>* +

4- (sin 2 фу sin 2ф* cos oy — cos *2qp* cos 2% cos <►) sin фу* —

— sin 2фу sin 2%, sin fly sin o*n~'/'dq4 (v, *k* — 1, 2,3; фу* = фу — ф*), *Bi* = aw —

ei»* 6* = Oг»—as*.

Если интегралы движения М. М* равны нулю, равновесие приведенной системы

$$^{Г}1 \text{ — } ^{г}го, \quad = 2| = 2» = 0, y_а = 0| = 0, \text{“ } 0_я = \text{—-},$$

$$Vi = T> = V* = 0. Ф_1 = Ф» = Ф = 0, \qquad (8.13)$$

$$г, = Г, = г, = г, = о, Од = y_v = Ф*\text{“ } о$$

эквивалентно равновесию двух одинаковых свободных колец, соосных третьему неподвижному кольцу, причем сила тяжести *G* направлена по оси неподвижного кольца.

Необходимым условием существования решения (8.13) вблизи положения магнитной потенциальной ямы будет соотношение: -5 -J?—P*- ' i^{2k} *(E* $\sim^{K} i + ^{kiEi1} +$

$$+ Г \qquad \&' \ _{[2}fa (E,-К,) + ^£|| = G, \ (8.14)$$

$$■‘ь 1 + р — ff; «2$$

где *e* — *p* — *Ую*> 0 — **малая величина** $y_м$ — **значения** *y,*. $y_в$ **в точке (8.13)); *К»* — *К* (*(), £(= £ (*,) (/ = 1, 2), = 2a (4o^{s} +** 4- гЮ) k_t — *a* (a® + $г_{10}$)

Достаточными условиями устойчивости равновесия (8.13) по отношению r_t, $г_я$, 0,, $б_я$, у, + $у_я$, у, + $у_4$ **на основании теоремы Румянцева [671 будут неравенства**

$$Urr > O, (У*,*, > 0, U«fl. > O, (Уо,е. > O,$$

$$> 0, Иуу > 0, Uwfi > 0, \qquad (8.15)$$

$$^A'i+VwVi+vXAuv > O,$$

——©*У* в,——ъ,*У,б,* > о, **где коэффициенты разложения потенциальной энергии, вычисленные в положении равновесия, равны**

$$U,,) = {}_1{}^{\wedge}{}_г0 — p) (1 — 3p + 2p® [2*. (E, — К,> + 4f£,|',$$

$$U* - 2Q — Ik (Л, - £,) + »!£d + m \ 4-$$

$$*1 \ ^1$$

$$= We,e, = 20».» = 2a'<? A- If ' (2 - hl) (K, - £,) -$$

$$-Й£11 + 4- \quad u„$$

$$ho, - Ue.H. = OQ\ 4\text{-}1(8 - 8§§, - *;> (K_1 _ £_i) -$$

$$--2Й\ (2 - hl?E, + --T\ £,1$$

$$<J.,,, - 2U.,h. = 2(/,.e, - 2aQ — |й\ (4 + hl)\ (K, — £,) —$$

$$- h!\ (2 - hl)\ £J.$$

$$Cvy - Uw, - vy.v, - 2Uy,v - 2U„,v. - 4£_w -$$

$$U^- \ 2£,.,,. - 2Uw.4 — 4\ (^{f'}M,--L\text{-}U,).$$

$$Q—SF\ O\ +P-$$

Численное решение неравенств (8.15) в частном случае L — Бдо (a — радиус кольца) ^{1e} дает следующее единственное условие: h, < 0,69. (8.16)

Физический смысл этого неравенства состоит в том, что близко-расположенные соосные кольца радиуса a с одинаково направленными токами неустойчивы по углу между осями, в то время как удаленное кольцо стремится занять соосное положение с другим кольцом Но если раньше с одним свободным кольцом (см. § 8.2) и нулевой маятниковостью было h » 0,73, то для двух свободных колец ограничение сверху на близость колец, естественно, более жесткое. Отметим, что вместо области устойчивости на рис. 24 здесь получено лишь условие на местоположение вертикального отрезка 3 на рис. 24. Остальные условия выполняются, так как вблизи положения магнитной ямы жесткость положительна.

$ 8. 4. Об устойчивости колебаний

Запишем уравнения (7.34) — (7 6) для случая M — *— M| — M_8 — о, описывающие движение приведенной системы двух одинаковых

$$' - \quad i\,ДА\,, \quad .2 \quad I\,ou.\,j\,ди.\,. \quad t- -Лъ\ г-------m\sim дт- ^{M'} ----------Щ +$$

$$+ -\$■\ Лян\ 2»,£',\ A\ A\ (£, \sin' O,) ---------- y*- (‘- 1, 2) \qquad (8.17)$$

свободных тел:

Т« §§ Значения производных и решение неравенств (8.15) получены О. Г. Чебо

Здесь р —■ -у — приведенная масса; A— центральный момент инерции тела относительно оси, лежащей в плоскости токового кольца; г, $г$, Фц PI, р, — координаты приведенной системы; г, $г$, b_t. Оа, Pi. р< — скорости приведенной системы. Значения A, F_u $F_,$, F определяются формулами

$$A, - F\text{-}' \text{ (P? + й),}$$

$$\text{F, = } F\sim\text{‘ |(цг* Л sin* О* р, — } A \text{ sin* 3^,1, F, - F"}^{1} \text{ ((цг* +}$$

$$\text{-I-} A \text{ sin* OJp, —} A \text{ sin* ОД). } F \text{ — pr*} A \text{ sin*3, + ysin*О,. (8,18)}$$

Потенциальная энергия магнитного взаимодействия приведенной системы U_t находится по формуле (7,36),

Рассмотрим следующие законы изменения координат и скоростей приведенной системы;

$$r = r(t),\ г = о, \qquad \text{— о,—} \qquad \text{р1 — р8 — —} \qquad \text{(8.19)}\ г$$

$$\text{— } г\ (t),\ г \text{ — О, О, — Ф» — } p_t \text{ — Ра — о.}$$

Этим законам отвечают прямолинейная траектория центров масс тел и неизменная относительная ориентация, при которой токовые кольца соосны, а общая ось колец совпадает с траекторией центров масс. Подчеркнем, что оба тела являются свободными, Найдем условия, когда законы (8,19) допускаются уравнениями движения (8,17), При подстановке (8,19) в уравнения (8,17) последние превращаются в тождество о — о, кроме уравнения для координаты $г$. Для нее после подстановки получаем

$$\text{— рт (/) — \{/„} \qquad \text{(8,20)}$$

П $ди.$

$г№ U.$ означает приходную $_y$- , вычисленную при значениях координат (8,19),

Уравнению (8,20) отвечает одномерное движение в силовом поле о потенциальной энергией U_w, где V_K — потенциальная энергия приведенной системы, в которой вместо координат $г$, О,. ->„ Ра подставлены значения правых частей соотношений (8,19), Известно (44, с, 37], что такое движение обладает интегралом полной энергии:

$$\text{р-уr + -^ — Д = const,} \qquad \text{(8,21)}$$

откуда путем разделения переменных получаем общее решение уравнения (8,20);

$$/4\ fie\text{-}uv''\text{'*- } +C. \qquad \text{(8.22)}$$

В этом решении роль двух произвольных постоянных играют полная энергия E и постоянная интегрирования С, Так как член

р-— —положительная величина, полная энергия будет всегда больше потенциальной, т. е. движение может происходить на участке, где $U10$ **-^**E**. Точки, в которых** U_{ta} **= £, определяют границы движения (точки остановки). Если точек остановки две (**$h|$, hj**,— движение финитно, т. е. происходит на отрезке [/»!, Л₈]. Если точек остановки нет или только одна,— движение инфинитно (точка уходит на бесконечность). Нас будет интересовать финитное движение, когда тела не могут удалиться друг от друга на бесконечно большое расстояние и не могут приблизиться ближе некоторого минимального расстояния между центрами масс тел.**

Финитное движение может быть только в потенциальной яме, т. е. когда в некоторой точке $г$ = **Ло (Л₈ <** h **< Л₈) имеет место минимум** $U_{№}$**. Условия минимума сводятся к тому, чтобы удовлетворить одному из двух равенств, связывающих отношение потоков и отношение взаимной индуктивности (вычисленной в положении г = Л₀) к собственной индуктивности контура (см. § 4.2). Возьмем одно из этих неравенств:**

$$'W = (L_n L\sim')\& \qquad (8.23)$$

Так как всегда £ᵤ < L**, необходимо условиться, что Ч₈ >%. Индекс 0 в правой части (8.23) означает, что взаимная индуктивность вычислена в точке** $г$ = ho **(собственная индуктивность** L **от г не зависит).**

Известно, что потенциальная энергия определяется с точностью до произвольного слагаемого. Выберем такое значение постоянной интегрирования С в (8.22), чтобы для бесконечно удаленных тел $(г$ **-*• оо) энергия и интеграл энергии** E **равнялись нулю. Таким значением будет**

$$C - - (1 + Ч;ЧТ') ч] (2L)^{-I}. \qquad (8.24)$$

Тогда вместо (5.5) получим

$$U^* = -Jr К_1 + Ч')'Л - м (1 - »">"]. \qquad (8.25)$$

где т " Ч^Г₁'Т¹ = const <1 и y **= £ᵢ (г) •** L**-.**

Используя (8.25), формулу (8.22) можно записать в виде

$$4 - TT'HlJ \qquad <8\ 28)$$

где с учетом значений координат $г$**, о„ о„ &, рв в функции** $U_{,,}$ **и формулы (5.2) получим уже встречающуюся формулу относительной взаимной индуктивности соосных колец:**

$$y = H0.L\text{-}' [(4- - *) K (A) - 4 E (*)].$$

Тем самым закон движения координаты $г$ **(0 в магнитной яме установлен — функция** $г$ **(Q, заданная в виде (8.26), удовлетворяет уравнению (8.20). С учетом сказанного выше относительно других координат получаем, что законы (8.(9), где** $г$ **(f) дается формулой**

(8.26),— частное решение уравнений движения приведенной системы. Выясним вопрос об устойчивости решения (8.19), взяв в качестве функции Ляпунова интеграл полной энергии возмущенной

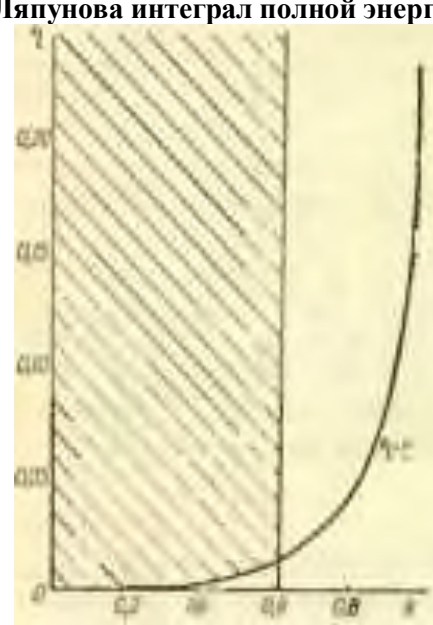


Рис 26

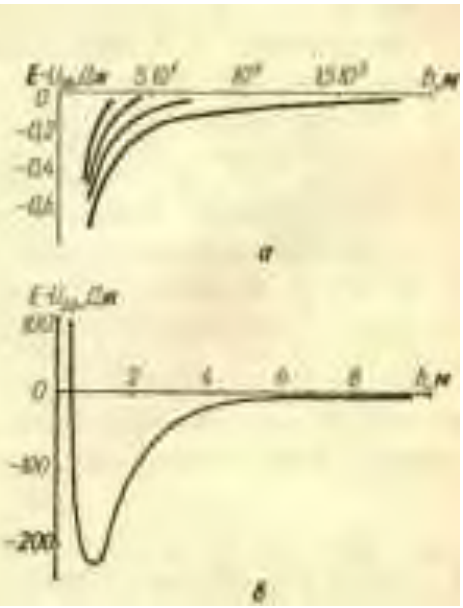


Рис 27

приведенной системы и разлагая его в ряд Тейлора по степеням малых возмущений. С этой целью воспользуемся полученными в § 8.2 и 8.3 результатами по устойчивости равновесия. По сравнению с изученными задачами необходимо учесть, что расстояние между центрами масс не постоянная величина, а функция времени. Кроме того, необходимо учесть равенство нулю интегралов движения М, Л1,. М2 и тот факт, что не одно, а оба токовых кольца являются свободными.

В итоге получим область устойчивости, показанную штриховкой на рис. 26. Кривая п= *у* определяет ограничение снизу на возможность устойчивости по смещению в направлении, перпендикулярном оси токовых колец. Если расстояние г между центрами масс больше *Но* (положение, отвечающее магнитной потенциальной яме), устойчивость по указанному смещению имеет место. Если же *г* < *h,,* (тела находятся ближе положения магнитной ямы), устойчивость нарушается. Поэтому на участке магнитного торможения положение центров масс тел неустойчиво. Отсюда следует, что на участке торможения должна быть некоторая связь, препятствующая смещению параллельных токовых колец в направлении, перпендикулярном их общей оси.

Для количественной оценки воспользуемся данными тороидального соленоида, описанного в работе [86] [17]. Будем считать также,

[17] **Диаметр тора 1,8 м, число витков 6000, индуктивность 166 Гн, ток запит-**

что масса каждого тела равна 5 - 10^5 кг (приведенная масса p — = 2,5 • 10* кг), ho = 1м — расстояние, на котором нуль магнитной силы (положение магнитной потенциальной ямы).

На рис. 27 показаны графики разностей £ — U_K (£ выбирается из условия нулевой начальной скорости сближения) для пяти зна-

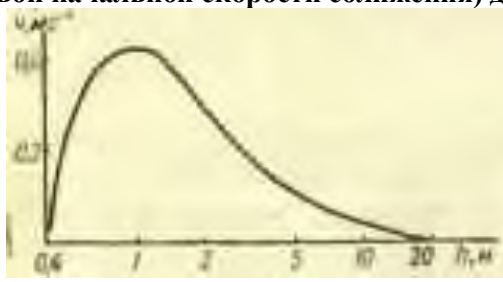


Рис. 28

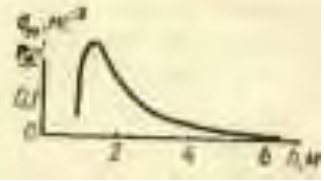
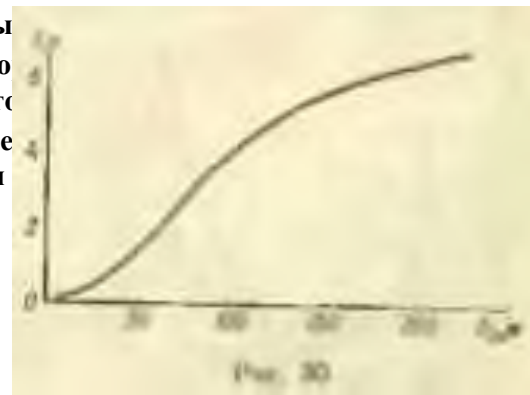


Рис. 29

чений расстояния hj (200 м, 100 м, 50 м, 30 м, 20 м), от которого тела начинают сближаться за счет магнитной силы. При сближении на расстояние менее 10 м для всех пяти начальных расстояний h_t значения E — практически совпадают. Они представлены одной кривой на рис. 27, б. Минимальное значение энергии £

— отвечает положению магнитной ямы остановки (нулевой относительной ско (дальние точки остановки) ближней то расстояние hi = 0,4 м. Отметим, что, е равна нулю, ближняя точка остановки



— расстоянии, меньшем 0,4 м. Например, если v_o = 1 мс—, скорость будет погашена на расстоянии Л, да 0,07 м.

На рис. 28 изображены графики относительной скорости сближения тел, соответствующие энергиям на рис. 27. На расстоянии, отвечающем положению магнитной потенциальной ямы, скорость максимальна и составляет v_{milt} = 0,43 мс—.

На рис. 29 показаны графики ускорения относительного сближения. Максимальное ускорение будет на участке торможения в ближней точке остановки (w_{nm} да 3,54 мс-^{2}). От начального расстояния h_t зависит время сближения тел. Такая зависимость представлена на рис. 30 [1В].

1 Расчет кривых на рнс. 27—30 выполнен О. Г. Чебориным.

§ 8. 5. Некоторые количественные расчеты

Полученные в § 8.2 и 8.3 результаты можно рассматривать как обоснование магнитной опоры свободного тела. Она основана на использовании магнитной потенциальной ямы По сравнению с известной опорой (эффект диамагнитного отталкивания) возникают особенности в характере магнитной силы, которые полезно оценить количественно.

Рассмотрим частный пример задачи о максимальной грузоподъемности в условиях ограничения —

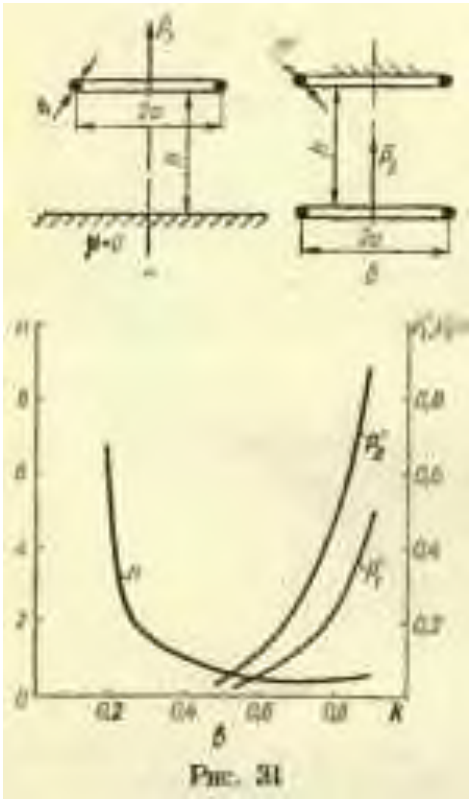


Рис. 31

по уровню магнитного поля Сверхпроводящее кольцо *(a* — **радиус,** *d* **<£** *a* — **толщина) расположено на одном и том же расстоянии** *h* **в од ном случае над сверхпроводящей плоскостью, в другом — под таким же сверхпроводящим кольцом (рис. 31,** *а, б).*

Считая критические поля $H_{,,}$ **для плоскости и колец одинаковыми, требуется определить максимальную силу диамагнитного отталкивания** P_t **и максимальную силу магнитного притяжения токов колец** $P,$ **в зависимости от** $h.$

Сила $P,$ **может быть определена по формуле**

$$P, = /, (dLn/dx)_x = 2h, \quad (8.27)$$

где *1 X* **— ток; — взаимная ин дуктивность соосных колец;** x **— расстояние между их плоскостями. Для определения тока будем исходить из условия равенства максимального поля Я на поверхности сверхпроводящего кольца толю**$H_к$ **(гипотеза Силсби, см., например, (9, с. 1871). Поле Я состоит из собственного поля** $H_к,$ **равного** $H_к = l_t$ **(лг^ ', и поля Я# такого же кольца, удаленного на расстояние** $x = 2h.$ **Для компонент поля Яв воспользуемся справедливыми при** $d \ \& \ a$ **формулами 173, с.**

$$2лаН2о = 1\ K\ [\ -\ K\ Ik) + -J- (1 + k'\ *)\ E(k)\ |, \quad (8.28)$$

$$4лаНъ = l,k\ |K\ (k) - E\ (k)\backslash,\ k = a\ (a* + MT^4.$$

где $k,$ k' **= (1 — fc²)'» — модуль и дополнительный модуль полных эллиптических интегралов** $K\ (k)$ **и** E **(ft). Тогда**

$$4яоЯ, = /, ((4 — 3^) (K* + k' Eг) — 2 (4 - k2)\ KE\'u. \quad (8.29)$$

2711:

Максимальный ток $Ц$ определится выражением

$$I\ Л = 4лай^{*}\ (4ad\sim' + |(4 — 3\ A^{8})\ (K» + A'“*E^{r}) — 2\ (4 — A^{2})\ K£|^{T}J^{M}. \quad (8\ 30)$$

Для диамагнитной силы с учетом (8.30) и (4.24) получим

$$P. — \frac{16л'с'цH^{\wedge}'\ [к — --- (I + fe'\sim')\ £\ I}{|4^{\wedge}_| +|(4 — 3k4\ (К' + f\ £«) — 2\ (4 — A')\ Kfif'P} = г\frac{}{}^{J}. \quad (8.31)$$

Сила $Р_я$ вместо (8.27) может быть определена по формуле

$$P» = 7J,(dL_{ls}/dxb-h, \quad (8.32)$$

где ток /# < /, неизвестен и должен быть найден из связей между магнитными переменными:

$$У, = Ll_t + L„I,_t\ У» - LJi + L/_s. \quad (8.33)$$

Полагая, как обычно, t] = У, УТy — $L_t£'$ (у < 1,4 > о, Т > y), из (8.33) получим

$$1» - \frac{Ji.}{L}\ \frac{н — y}{1-»'',} \quad (8.34)$$

Из физических соображений ясно, что разрушение сверхпроводимости критическим полем раньше наступит для кольца с большим замороженным потоком %. Тогда поле на поверхности кольца с потоком % за счет тока 1» в другом кольце будет определяться формулой (8.29) с заменой на /„ модуля $к$ на А, = 2а (4а* „. Л^{8})$^{-7'}$ и k' на $k\backslash$ = (1 — А?)$^{7'}$. Это позволяет записать выражение для максимального тока:

$$1X = 4лаН^{*}\ (4ad^{-1} + (4 — y)\ (I — г|y)^{-1}\ |(4 — ЗА?)\ (К? + Aj\ E?) —$$

$$— 2(4- A?)\ Я,£if/,r^{*};\ K = K\ (кд,\ E» = E\ (A_1), \quad (8.35)$$

что с учетом (8.32), (8.34) и (4.24) дает следующую формулу магнитной силы токов соосных колец:

$$P,- \quad 5\left(+^{*}> \ ^{r}>.\right] — y0 — \Pi)\sim'$$

$$^{*}«-1\ л£П$$

(8 **36**)

Так как между А, и А существует связь

$$А,- 2А\ (I + ЗА+/-, \quad (8\ .7)$$

правые части формул (8.31) и (8.36) можно рассматривать функциями аргументов k, -j, ц. На рис. 31, *в*“* показаны графики безразмерных сил P: = ~ и их отношения $n = P_l P \sim^{i}$ в частном случае -у = 10.

Данные расчета показывают следующее. Если зазор h мал {большое k), максимальная грузоподъемность новой магнитной опоры примерно в два раза больше максимальной грузоподъемности опоры, основанной на эффекте диамагнитного отталкивания. При этом конструктивный зазор и критическое магнитное поле, ограничивающее рост грузоподъемности, принимаются одинаковыми. Если зазор h увеличивать, то, наоборот, становится эффективнее опора, основанная на диамагнитном отталкивании.

Таким образом, новый способ магнитной опоры предпочтительней на малых зазорах — при одном и том же критическом поле он дает выигрыш по грузоподъемности примерно в два раза.

Этому выводу можно дать следующее наглядное объяснение. Магнитная сила в обоих случаях пропорциональна произведению токов /j/$_t$ и производной взаимной индуктивности $\partial L_{ы}!\partial x$. Для диамагнитной опоры произведение токов всегда больше, причем с увеличением расстояния разница между этими параметрами для двух опор увеличивается. Значит, по члену диамагнитная опора дает большую грузоподъемность. Однако по другому множителю ее показатели хуже. Если зазор равен h в обеих конструкциях, производную для опоры, основанной на магнитной яме, следует вы. числять при $x — h$, в то время как для диамагнитной опоры необходимо полагать $x = 2h$ (система кольцо — сверхпроводящая плоскость эквивалентна двум кольцам на удвоенном зазоре). Так как $dL\wedge i dx$— монотонно убывающая функция зазора x, член $(\partial Ц_d/\partial x)x=n$ больше члена $(д/.1_8/йх)_ж=2л$, причем разница этих параметров увеличивается при уменьшении зазора ft. Вот почему, начиная с k 0,5 (см. рис. 31, в), магнитная опора на новом принципе эффективнее диамагнитной опоры Расчеты, не отраженные на рис. 31, *в,* показывают, что графики отношения сил Р, и $Р_2$ практически не изменяются при других значениях безразмерного параметра $ad\sim'$-

Для полученных выше данных по максимальной грузоподъемности использовано предположение об одинаковом критическом магнитном поле двух опор. На самом деле величина критического поля будет различной, и это различие обусловлено современной технологией сверхпроводящих материалов. Известно [25,701, что сплошной сверхпроводник, как правило, может быть изготовлен только из сверхпроводника первого рода. Образцы в виде тонкой проволоки (жилы) могут быть изготовлены из жестких сверхпроводников

1* Расчет кривых на рис. 31, *в* выполнен О. Г. Чеборинym,

второго рода, которые имеют более высокие (на 1—2 порядка) значения критического магнитного поля. Так как реализация диамагнитной опоры требует сплошного сверхпроводника *, в известной опоре одно из тел будет сверхпроводником с максимальным уровнем магнитного поля порядка 1*0* Э. Полю 0,5 10* Э отвечает магнитное давление

$$p = 4\text{- М>ХД}^{a} \qquad 100 \text{ кГ} \cdot \text{см}\sim 2 \qquad (8.38)$$

что в тысячу раз превышает давление диамагнитной опоры.

В работе [10| получена формула магнитной силы катушки, удерживающей сверхпроводящий диск радиуса a **толщиной** i**. Используя эту формулу для безразмерного параметра** $n = Pf\text{-}T^*$ **(**G_x **— вес диска), получим**

$$n, = \qquad (8.39)$$

где y **— удельный вес материала диска;** b **— ширина катушки;** $ty < 1$ **— коэффициент, равный отношению «среднего» поля к полю** $H\text{-}H$

Для магнитной силы в системе двух колец с учетом того, что сила P_s **уравновешивает вес кольца, а не диска, вместо (8.39) запишем**

$$П = 1\text{^}M.H\text{^}(n1уг', \qquad (8\ 40)$$

где $n =» Pyp?'$ **(в зоне малых зазоров** $n \sim 0{,}5$**, см. рис. 31,** $в$**).**

Задавая $y \sim 10$ **Г • см**$^{-3}$**, ;** t **1** мм, $a \sim 1$ см, $b \sim 1$ **мм, получим**

Уровень	110	10*	(0*	10*
$П_1$	10“	1 — —		
	10^{-1}	10	10»	10*

Расчет показывает ограниченные возможности диамагнитной опоры (прочерки для 10* Э, 10* Э означают, что в настоящее время нет сплошных сверхпроводников с Я* > 10* Э). Напротив, опора, основанная на использовании магнитной потенциальной ямы, позволяет реализовать устойчивую неконтактную опору уже в полях $H \sim 0{,}5 \cdot 10^8$ **Э, а используя жесткие сверхпроводники, получить опору, работающую в условиях перегрузок** $100g$ **и выше.**

Кроме грузоподъемности магнитной опоры P **важную роль играет ее жесткость С. Этот параметр связан с** P**, и для оценки С диамагнитной опоры можно записать** $Q \sim PyT\backslash$ **где** a **— характерный размер свободного тела. То же справедливо и для опоры в магнитной яме двух колец. Однако специфическая зависимость магнитной силы от расстояния в случае магнитной ямы допускает**

***° Для лучшего сплошного сверхпроводника (ниобия) прв** T **— 4,2 К поле** $H_к$ **=> 1400 Э.**

опору с очень малой жесткостью. Идея такой опоры ясна из рис. 32. Кривая *1—2* — магнитная сила между кольцами *! к 2* (случай взаимодействия с минимумом магнитной энергии), кривая *2—3*— магнитная сила между кольцами *2* и *3*. Такой вид кривой можно обеспечить в частном случае нулевого замороженного потока кольца *3*. Сумма ординат кривых *1—2* и *2—3* даст кривую *А,* имеющую очень пологий участок между /?, и

Количественная оценка малой жесткости может быть проведена следующим образом. Энергия

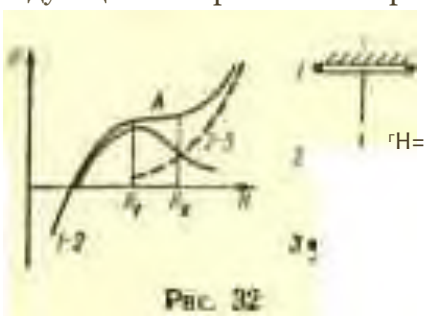


Рис. 32

одинаково удаленных колец с нулевым потоком кольца *3* будет

$$O\ \text{А.}\ \text{-Д-}\ [1 + 1)^2 — 2\text{т}|\text{у},_2 + \qquad 4\text{-} \qquad (8.41)$$

магнитного взаимодействия трех

+ П^8 (У?2 + + ^{o} <*У,2*>

С учетом того что взаимная индуктивность удаленных колеи обратно пропорциональна кубу расстоянии *х,*
получим формулы силы и жесткости:

$$\text{Р, м З х (1] — } y)\ \text{G..} \qquad (8\text{-}42)$$

Пусть - 4т] + + 14t]^{2}у + 0(чУ)| G/u = *Уы* = *У)*-

$$= iG\hat{}Lx. \qquad (8.43)$$

Тогда

$$C_a \text{ » ЗЗтц/GgX}^{-1}\ [y\ 1), \qquad (8.44)$$

и если *у* ~ 10^{-3}, то C_8 ~ 10 G,x . в то время как без пологого участка *С* — GjX^{-1}.

С учетом Ч' ~ *Bna\ L ~ G$_t$ — 2лаЬ1у (&, t* — ширина и толщина кольца; у — удельный вес) условие (8.44) может быть записано в виде

$$\text{Вт)У = гь/урох.} \qquad (8.45)$$

Пусть *у* 10^{-3}, *В* ~ 10^{-3} Гс, *b — t* ~ КГ^3 м, у — 10 Г • см$^{-3}$. Тогда х « 50 см, а радиус колец будет порядка 1 см (это обеспечит *у* 10). Таким образом, посредине между кольцами, удаленными на 1 м, можно осуществить магнитную опору кольца весом *С* ~ ~ 1 Г с жесткостью $C_я$ ~ 10“ ^{6} Гем$^{-1}$.

Магнитные силы и жесткости определяют особенности движения свободного тела. В частности, для магнитной системы на рис. 31, б в отсутствие других (кроме магнитных) сил имеют место колебания. Частоты и период этих колебаний в зависимости от уровня поля в

Приборе приведены ниже. Система трех колец, обеспечивающая ма лую жесткость опоры, дает со ~ 10“' с$^{-1}$, T ~ 10^{a} с.

• » (О* 10> 10»

со. с$^{-1}$ T. **io 0,5- № ю 0,5 • 10* 5. 10”’ IO^{-1} 5 • Ю$^{-2}$ КГ$^{-2}$**

с

Глава 9

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАНЕТАРНОЙ СИСТЕМЫ С МАГНИТНЫМИ МОМЕНТАМИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

§ 9. 1. Два цилиндрических магнита

Потенциальная энергия приведенной системы, эквивалентная двум свободным цилиндрическим магнитам с учетом (3 10), (7.17), (7.19), (7.27), (7.31), будет иметь вид

$$= {}^{1}(M — A\text{^}\cos fr j — MjjCOsOa)^{2} (nr*fr\sim^{z}\text{-}b\ A\sin*\#, +$$

$$4\text{-}\ A_t\sin*\ \#_2)_{-}{}^{l}\ 4\text{-}\ x^{1}\ S\ (r* + z*\ 4\text{-}\ 2rl\ К— I)"\ \sin Oj\ \sin0 —$$

$$—6_d\ \sin 0,\ \sin yj — 2zl\ |(— 1)"\ \cos\#,\ 4\text{-}\ 6_{„}\cos\#_a|\ 4\text{-}$$

$$4\text{-}2P[l\ Д_{„}\cos0,\cos0_2— Д_{п}\ \sin ft,\ \sin\#_2\ \cos\ (0— T)H“’/*. \quad (9.1)$$

Уравнения движения (7.34), где U определяется по (9.1), допускают частное решение

$$г = г_0,\ г = 0,\ \#, = \#, = 0,\ 0 = \text{const},\ y = \text{const}, \quad (9.2)$$

$$\mathbf{г = 0,\ 2=0,\ б, = \#_2 = 0 = y = O.}$$

При этом должно быть выполнено условие

$$(М — M, — /И,)\ b\ 2цг№\ (го\text{-}^{3}—Л\text{-}^{3}).\ fj = (fo + 4(^{2})_{,}/’. \quad (9.3)$$

Равновесию приведенной системы (9 2) отвечает планетарная конфигурация двух цилиндрических магнитов с магнитными осями, перпендикулярными плоскости орбиты центров масс магнитов, и одновременно собственное вращение вокруг магнитных осей. Для существования такого движения магнитное притяжение должно уравновесить центробежные силы орбитального движения (условие (9.3)).

Вводя малые возмущения координат *г, z,* $\#_v$ $\#_в$ и скоростей г, г, $0_{„}$ $0_в$, 0, у, а также считая возмущения координат 0 и у произвольными по величине, докажем, что полная энергия возмущенной

приведенной системы V может быть положительно определенной функцией по отношению к малым возмущениям. Условия положительности V получаются из критерия Сильвестра и коэффициентов разложения потенциальной энергии возмущенной системы по малым возмущениям. Эти коэффициенты, уменьшенные в $2x$-$г$ раз, таковы:

$$= \text{I} - \text{x?} — 12x_i x_t.\ U, = \text{l-}xi + 12xU, > \text{O},$$

$$\text{V^e/Г}^8 = K, (\text{I} — *\text{?} + x > m\ (1 + \text{tf}) — 3\ \sin^2 \text{M«x-}\ (\text{I} — \text{x®})$$

$$(1 = 1, 2)$$

$$Uefi, = \quad \text{I}(3_{\text{A}} = ? + x' + 4\text{»sin 6 sin } y + <1 + \text{x?}) \cos \text{p} \cos \text{y}|.$$

$$U_t t), = — 6г_o x^* x, \text{ sin p, L,», } = Ьг^.x, \text{ sin } Y\ I_{M_0} = M — M, —$$

$$x, = гот'; *\text{s} = \quad * M\ \text{AJ} \quad \text{И}'$$

Неравенства Сильвестра, при кот орых V является положительной функцией, СВОДЯТСЯ К положительности $U_{„}.\ U_{г1}, Uofi_r$ **(» =1, 2)**

и положительности определителя

$$\begin{vmatrix} Ur & Urt & 1И. \\ И^* & \text{l/atr } U_{\text{a.v}} & \\ 1\ Urb & Un \text{ в } u. & \bullet \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{|>o.} \\ 1 \end{matrix} \qquad (9.4)$$

Поэтому устойчивость планетарной системы зависит от двух геометрических параметров x„ x* параметров K, и углов P, y

Независимым геометрическим условием является условие положительности Ur, (условие радиальной устойчивости)

$$1 — \text{x}, - 12\text{x},\text{x}_r > 0 \qquad (9.5)$$

Если магниты одинаковы, условие (9.5) эквивалентно неравенству [32, 331

$$1г\sim > 0.425 \qquad (9.6)$$

Смысл этого неравенства заключается в следующем При малых расстояниях между длинными параллельными магнитами которые притягиваются друг к другу, взаимодействие определяется близкорасположенными разноименными полюсами (вклад удаленных одноименных полюсов незначительный) В этом случае потенциальная энергия изменяется как — J и устойчивость орбиты обеспечивается. Увеличение размеров невозмущенной орбиты уменьшает относительную разницу в расстояниях между разноименными и одноименны ми полюсами и в пределе приводит к дипольному взаимодействию lU = —1/г^8) с неустойчивыми орбитами Поэтому при некотором отношении между размером орбиты $Ьг_a$ и размером магнита 2/про

исходит «переход» через закон $U = -MG$, **разделяющий взаимодействие с устойчивыми и неустойчивыми траекториями. Для одинаковых длинных цилиндрических магнитов это соответствует условию (9.6).**

Если размеры одного магнита намного больше размеров другого, вместо (9.6) получим

$$к\ (Ьг0\sim' > 0{,}5. \qquad (9\ 7\}$$

Если импульсы собственного вращения магнитов намного больше импульса орбитального вращения

$M, > M_o\ (i = 1, 2)$, **коэффициенты (/e,e, и определитель (9.4) будут положительными при любых Р и** y

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.1. Динамическая система двух цилиндрических магнитов, совершающих относительное орбитальное движение. быстрое собственное вращение вокруг магнитной оси, перпендикулярной плоскости орбиты, является устойчивой если только размер невозмущенной орбиты не превосходит размера, сравнимого с размером магнапт.

Если размеры орбиты больше размеров магнита, устойчивость невозможна (нарушается условие (9.5)) Тогда приходим к извести ному результату неустойчивости движения пары магнитных моментов 1115].

§ 9. 2. Вытянутый сфероид — диполь

Выпишем еще раз найденную выше формулу магнитной потенциальной энергии (6.39) в системе неподвижного магнита в форме вытянутого эллипсоида вращения и свободного магнитного диполя:

$$U = A\ pa — | \quad __\text{т}^{\Delta}\sim(\ д!\ Т\ )\ \sin 9 \sin (а — ф) +*$$
$$+ \text{Aretha} —)\text{coso}|,$$

$$2A^{s} - Я, + (Rt — 4a_{\cdot}C_{\cdot})V', 2aM - R, — (R? — ta"CT"'‘. \quad (9.8)\quad Я, = fl_2 + p_2 +- C2$$

$$A, p, a — \text{const} > 0.$$

Уравнения движения свободного тела с потенциальной энергией (9.8), записанные в лагранжевой форме

$$L - T\text{-}U, \%\text{-}e,a.\ \text{t, 0,ф, Ф.} \qquad (9.9)$$

где

$$2T - m\ (\text{р2} + \text{р}_{2»2} + £*) + A\ (ф_2\ \text{si}\ п_2\ 9 + б^{8}) + C\ (Ф + Ф\ \cos\ О)'$$

Ш

<m — масса; A, C — центральные моменты инерции), допускают частное решение

$$\text{р - г,„ а - е>„i, с = О, б= 0, ф - ш,»,}\ \Phi = \text{to,/. р - 0,}$$

$$\text{« = ®о. С” 0, 0 = 0, ф — «»„ ф = ю,(ю>, to„ с, — const >0).}$$

Ему отвечает стационарное движение диполя по окружности в экваториальной плоскости эллипсоида и одновременно собственное вращение около магнитной оси, которая перпендикулярна экваториальной плоскости.

Необходимым условием существования решения (9.10) является равенство модулей центробежной и магнитной сил

$$m\text{г}_a o — A'pa\sim' \text{(гоо)}^{\text{”1}}\text{. °о} = {}^{a}\sim' \text{(а* 4-}\ {}^{\text{г}}\%''' >$$

а достаточными условиями его устойчивости по отношению к р. £, б, р, £, i& — два независимых неравенства [34]:

$$\text{г,<}aУ2\ \text{(о.< /3),} \qquad \text{(9.11)}$$

$$\text{С (to, + to}_s\text{) + mroto}_0\ \text{(Arcth}\ o_o — \text{cO’Ь on > Ato-} \qquad \text{(912)}$$

Эти неравенства можно получить, используя интеграл уравнений (9.9)

$$2V - K\ \text{(М, —}\ M_1\ \text{cos б)}^8\ \text{4-}\ 2U + m\ \text{(р«} + £) + \text{Аб}^4 +$$

$$+ AK\ \text{(ф —а)* mp}^3\ \text{sin}^2\ \text{О = const,}$$

М, = C **(to, + to),** $M_я$ **— *тоо* +** $M,,\ K$ **= (mp* +** A **sin⁴ О)-⁴, теорему [67] и критерий Сильвестра.**

Очевидно, выбором размера финитной траектории и собственного импульса можно удовлетворить условиям (9.11), (9.12) Для свободного тела точечных размеров $(A = C = 0)$ **единственном условием устойчивой траектории и ориентации магнитной оси будет**
(9.11) . Если диполь и эллипсоид поменять местами (диполь неподвижен, эллипсоид свободный), условие (9.11) сохранится, (9.12) — нет, но ему также можно удовлетворить достаточно быстрым собственным вращением эллипсоида.

Свойства координат о, т, ф и условие некасания диполя к эллипсоиду (а. > с,) определяют ограничение на форму эллипсоида, когда еще можно удовлетворить условию (9.11). Оказывается, что эксцентриситет эллипсоида должны быть больше 1/1^3. Другие системы с магнитными моментами, перпендикулярными плоскости траектории (в частности, шар — диполь, сплюснутый эллипсоид — диполь), неустойчивы.

/Можно показать, что условие устойчивой траектории (9.11) эквивалентно условию в < 2 в потенциале U **—----------— Оно уста**

навливает существенную особенность устойчивой магнитной системы: размер траектории не может намного превышать размер большего магнита. Поэтому закон удаленных магнитов (2.2) к устойчивости не приводил. Но для закона (9.8) в области 1 < *Oi* < *о-* < *УЗ* свободная траектория устойчива, и падение не произойдет. Устойчиво также положение магнитной оси диполя.

§ 9. 3. Магнитные системы других типов

Используя технику предыдущих параграфов, можно изучить устойчивость планетарной конфигурации с другими моделями магнитов. С целью экономии места опустим громоздкие выкладки и опишем качественно результаты, полученные для кольцевых токов и шаровых магнитов. Эти результаты относятся к частному случаю быстрого собственного вращения.

Область устойчивости планетарной системы двух идеально проводящих колец, оси которых перпендикулярны плоскости круговой орбиты центров, имеет вид области, заштрихованной на рис. 24. При этом точки, лежащие выше кривой /, как и для устойчивости равновесия, отвечают магнитному притяжению, что необходимо для существования магнитной планетарной конфигурации. Точки, лежащие ниже кривой *2,* эквивалентны ограничению сверху на размер устойчивой траектории. Отличие кривой *2* для равновесия от кривой *2* для планетарной системы в том, что в первом случае жесткость (производная магнитной силы по смещению) должна быть положительной, в то время как для устойчивости планетарной системы это условие менее жесткое (условие «дозволенного» потенциала е < 2). Местоположение вертикального отрезка *3* на рис. 24 в зоне *к* < 1 в случае планетарной системы колец с параллельными осями является условием некасания.

Динамическая система шаров (см. рис. 22), совершающих быстрое собственное вращение, оказывается неустойчивой независимо от соотношения размеров шаров и размеров орбиты.

Глава 10
ПЛАНЕТАРНЫЕ СИСТЕМЫ С МАГНИТНЫМИ МОМЕНТАМИ ЛЕЖАЩИМИ В ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

$ 10. 1. Два цилиндрических магнита

Уравнения движения приведенной системы (7 47) (п= = 2) с потенциальной энергией (9.1) допускают частное решение *г* = *Га, г* = О, О, = o_8 = -J-, Р = *у* == -у-,

(**10.1**) г

= г = 0, oj = oa = Р = у = 0 (*M_t* = *Мя* — 0),

если только первая производная U_t по г, вычисленная в (10.1), положительна и равна

$$U_r = -\wedge\sim \qquad |(\&г - 2О^{\text{“!}} + Ь_{+} 21Г^{1} - 2 \qquad .$$

(Ю.2)

Равновесию приведенной системы (10.1) отвечает относительное орбитальное движение центров масс двух свободных цилиндрических магнитов по круговой орбите с размещением осей магнитов в плоскости орбиты и нулевыми импульсами собственного вращения вокруг магнитных осей.

Взяв в качестве функции Ляпунова интеграл полной энергии возмущенной системы, получим достаточное условие устойчивости траектории центров масс в виде двух неравенств:

$$\text{В. ? , ?} \quad * \text{ ц } >0' \qquad 00»$$

Первое из написанных неравенств отличается от условия (9.5). полученного для случая перпендикулярности магнитных моментов плоскости орбиты (исключая случай $Л] = A_t = 0$), коэффициентом возле $U,$. Несовпадение (10.3) и (9.5) будет еще и потому, что значения производных $U,, U,,,$ вычисленные в положении размещения магнитных моментов в плоскости орбиты, не равны значениям производных $U,, u,,$ вычисленных в положении перпендикулярности моментов плоскости орбиты.

Используя (10.2), (10.3) и опуская промежуточные выкладки, видим, что первому неравенству (10.3) удовлетворить невозможно даже в случае $A_t = A_{ий} = 0$. Отсюда следует, что рассматриваемая планетарная система не является устойчивой.

Физический смысл невозможности удовлетворить условию S = = y- $U,$ + $U,,$ > о в случае лежащих в плоскости орбиты цилиндрических магнитов состоит в следующем. Условие S > 0 ограничивает величину производной силы по расстоянию между разноименными магнитными зарядами. Это расстояние меньше расстояния между центрами магнитов, а производная силы больше. Поэтому, несмотря на закон силы в отличие от случая § 9.1 (расстояние между разноименными зарядами равно расстоянию между центрами магнитов) удовлетворить первому неравенству (10.3) невозможно.

§ 10. 2. Два свободных токовых кольца [21]

Рассмотрим более подробно случай устойчивости планетарной системы двух свободных идеально проводящих колец. Исходными являются уравнения движения приведенной системы ■

***1 Результаты этого параграфа получены совместно с О. Г. Чеборинным.**

(7.34) с потенциальной энергией (7.(7>). Пусть координаты и скорости приведенной оаотцми принимают значения

г— h, **2 = 0, = -i-, O_a = -5- , P = -j-, Y = -f-.**

(10.4) e = 0, 2 = 0, O, = 0, 0, = 0, P = 0, т = 0.

Подстановка правых частей (10.4) в уравнения движения (7.34)' еде M, = /$И_2$ = 0, и учет формул (5.10), (5.13) превращают вое уравнения движения в тождество 0 = 0, кроме уравнения Лагранжа дня координаты *г.* **Здесь ми получим**

$$U_r = \mathbf{M}2 \text{ (phyt} \qquad \textbf{(10.5)}$$

Это соотношение является необходимым условием существования равновесия (10.4). Равновесию отвечает следующая планетарная конфигурация: центры масс тел *O,* **совершают движение по круговой трьеотдрий вокруг общего центра масс O, оси токовых колец лежат в плоскости трьгктррйи точек O, на прямой, содержащей точку O и вращающейся с постоянной угловой скоростью; скорость вращения тел вокруг магнитных осей равна нулю. Физический смысл условия (10,5) очевиден, если вспомнить, что** *M* **— орбитальный момент импульса свободных тел и, ьлгдрвьтглотр, правая часто (10.5) — центробежная сила. Поэтому условие (10.5) означает, что в ^возмущенном движении планетарной системы магнитные силы** *U,* **должны уравновесить центробежные силы инерции. Чтобы это было возможным, магнитные силы должны иметь характер притяжения (***U,* **> 0). Такое условие может быть выполнено.**

Займемся исследованием устойчивости решения (10.4). С этой целью ввгдгм возмущения координат и скоростей:

$$X> = \Gamma — h, \text{ Xj} = 2, \mathbf{Xj} = \#\text{i} — \mathbf{-y}\ , \mathbf{x_4 = \Phi},\text{----------} \text{y},$$

$$\text{“ P -------} T\ '^{x}\text{*} \sim \text{Y---------- F*} \qquad \text{(Ю‘6)}$$

$$\text{*}_1 = \Gamma, \mathbf{X}, = 2, \mathbf{X} => «!, \mathbf{x_4 = O, хц = p, x, = V,}$$

считая x_t, X_t *(i* **= 1,** 6) **малыми по величине.**

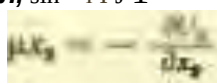
Уравнения возмущенного движения йолучим следующим образом. Выразим ооррдйнати и скорости в (7.34) через возмущения и значения ооответотвтющйх координат или скоростей в тцврзмтщцт- ном движении. Затем из полученных выражений вычтем срртвцтотвт- ющие уравнения (7.34), в которых координаты и скорости принимают значения (10.4) (в нашем случае это условие (10.5) для уравнения по координате *г* **и тождество** o = o **для ротьльтых уравнений)**

Проделав указанные операции, получим следующие уравнения;

$$\text{ИХ, } = \text{- -з^-+ И } (h + x,) \{\text{F io +}$$

$$\left(\underline{A,\ 4\text{«|*ЖЙ» + ^£Sin*x}_a x,} \qquad 1*1 \qquad .. ____ \text{ Л"} \right) \qquad \text{(Ю.7)}$$

$$\text{»• I* < • 4- A sin' ж } \Pi, \sin^* \text{ ч I J } 1'' \ ^{Vr} \qquad \text{НЛ' '}$$



$$\text{A*» — —} \qquad \text{— 4 МТ*оып 2x, — 4 АЛк sin 2x}_a,$$

$$\text{A}^x\text{« = —} \qquad 4\text{-} \ ^{MF} i_O \ ^{\sin 2x}\text{« + 4 Aficsrn 2ж}_4,$$

$$^{Л}\text{>-T"<4<« si" x,) = —} \qquad \text{. A -a-(^»sin"x,) = —}$$

где

$$Fa = \text{M/C" (i = I, 2), } K = \text{p } (h + x^{\wedge} + A_t \text{ sin" } x, + A, \text{sin' x}_a.$$

$$Fao = \{\text{ffs } \{h + \text{xj* -f } A, \text{ sin}^8 \text{ x,l } x_B — A, \text{ sin' *}_4 x_6\} \text{ №'},$$

$$F40 = \{[\text{p (ft + *s)}8 + \bullet \ A\text{i sin' Xgl x}_8 — A! \text{ sin' x}_s x_e) \text{ №}^l,$$

$$U_o = 4 \text{ <Y} Ln - 2\text{Y}, \qquad + \text{ YLJ (£,,£}_и \text{ - Lf}_a\text{)-1,}$$

$$L_M == \quad aja \text{ J J [cos x, cos x}_4 \text{ cos 2<pi cos 2 qp —}$$
$$o \ o$$

$$— \quad \text{(sin 2 qp sin 2 ф}_г + \text{- sin } x_8 \text{ sin X}_4 \text{ cos 2ф cos 2 ф,) cos (x}_6 — \text{ x,,) —}$$

$$— \quad \text{(sin X}_4 \text{ sin 2ф1 cos 2 ф, — sin Xs cos 2ф! sin 2ф,) sin (x}_8 — \text{ x,,)| x}$$

$$\text{X } \{(\text{Xi} + \text{fi})^2 + \text{x}| + a? + \bullet \ al + \bullet \ 2 (x + h) \ [a! \ (— \text{sin X cos x}_6 \text{ sin 2ф, +}$$

$$+ \text{ sin X}_2 \text{ cos 2ф! + a}_t \text{ (— sin X}_4 \text{ cos x}_e \text{ sin 2ф, +- sin x}_e \text{ cos 2ф}_a)| \text{ -f}$$

$$+ 2\text{xJ } (a \text{ COS x}_8 \text{ sin 2ф| — } a \text{ cos X}_4 \text{ sin 2ф.) +}$$

$$+ 2 \text{ a,a, [(cos 2ф! cos 2 ф, +- sin x}_3 \text{ sin x}_4 \text{ sin 2 ф}_4 \text{ sin 2 ф}_a) \text{ cos (x}_5 — \text{ x,) f}$$

$$+ \text{ (— sin X}_4 \text{ cos 2 ф}_x \text{ sin 2 ф' + sin x}_8 \text{ sin 2 ф[cos 2 ф, sin (x}_6 — \text{ x,) —}$$

$$— \text{ cos x}_2 \text{ cos-x}_4 \text{ sin 2ф}_1 \text{ sin 2ф,|} \} \qquad ' d<pi_{dc} p_2. \qquad \text{(10.8)}$$

Так как возмущенная приведенная система (10.7) — (10.8) является консервативной, ее полная энергия будет интегралом движения. Этот интеграл можно взять в качестве функции Ляпунова V и, воспользовавшись малостью возмущений x< $x,$, разложить V в ряд Тейлора в точке x_t — 0, x_t = 0 $()$ = 1, ..., 6). Это разложение начинается с членов второго порядка, которыми и ограничимся.

Производные функции U, **(x1(..** $x£$ **по возмущениям** x_t, **вычисленные в точке** x, — o, — **не что иное, как соответствующие производные потенциальной энергии приведенной системы, вычисленные в положении соосности колец (см. § 5.2). Например,** $-^1$ = (/ц. ■^7' = Upp **и т. д. Поэтому коэффициенты разложения потенциальной энергии известны и даются формулами (5.13).**

Из полученных выражений следует разложение в ряд Тейлора функции V **(At =** Ag = A) **137]:**

$$2V — p (я? 4- x|) + Ax| 4- Ax* 4- -g- A (x_t — xjf 4-$$

$$+ -§-цЛ^a(Й + 4g) + (Ж +$$

$$+ (^e + -\$-^)xf + (y_{ee} + +$$

4- 2tp,exjx$_4$ **f** $2U_{e,lS},x_9x_t$ **4-** $UboX$, **4-** U^xl **4- 2Ув.е,*Лв- (Ю.9) где используются обозначения производных (5.13), а параметр** Pg = 2**ра**^{2}**А — — безразмерный коэффициент, связывающий приведенную массу р, радиус токового кольца** a **и центральный момент инерции тела** A **относительно оси, лежащей в плоскости кольца.**

В соответствии с критерием Сильвестра для положительности квадратичной формы (10.9) потребуем выполнения неравенств $-Зm-$

$$\text{~~X^'S^~~}^u\wedge\wedge^t\sim^{1?<}\wedge^{><l}\wedge^u\sim^{>й,u}{}''+mg^u\wedge*$$

(10.**10**)

$$(u_м + oj.u_t- \quad [u_„ (u_{w<>}, + \quad + U_W,) -$$

$$\textbf{- } !VU \textbf{ j > 0.} \qquad \textbf{(10.10)}$$

По теореме Ляпунова [53] они эквивалентны достаточным условиям устойчивости решения (10.4) по отношению к г, г, ф Фг, р, у, г, г, <4, Р, $У$**- В свою очередь, достаточные условия устойчивости приведенной системы будут эквивалентны достаточным условиям устойчивости исходной планетарной системы двух свободных тел с магнитным взаимодействием идеально проводящих токовых колец.**

На рис. 33 штриховкой представлена область устойчивости в частном случае L **= 5**p**oa. Нижняя кривая** $p = y$ **ограничивает область выполнения необходимого условия существования планетарной системы (положительной производной j и второе неравенство (10.10). Верхние кривые, построенные для различных**

значений параметра Pv ограничивают область выполнения первого неравенства (10.10). Последнее неравенство (10.10) вносит ограничение на модуль эллиптических интегралов Л *(Л* <, 0,61). Остальные неравенства (10.10) для точек заштрихованной области выполняются автоматически.

Обсудим физический смысл полученного результата. Точка С, на рис. 33 соответствует положению, в котором отношение потоков колец равно отношению их взаимной индуктивности к собственной (положение магнитной потенциальной ямы). В этом положении ток в одном кольце равен нулю. Значит, равна нулю и магнитная сила. Поэтому в точке $C>$ не выполняется необходимое условие существования планетарной системы — наличие магнитного притяжения колец.

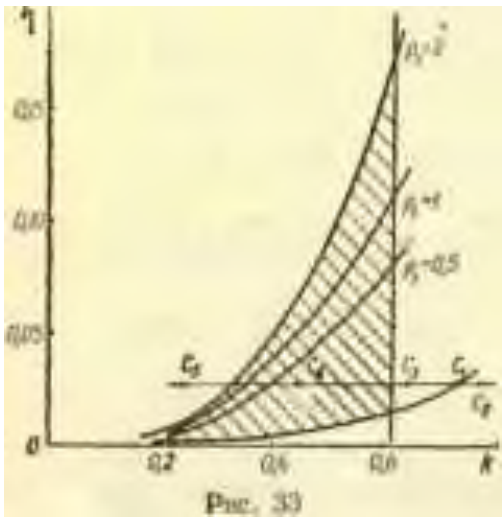


Рис. 33

В точке С*, отвечающей меньшему расстоянию между центрами колец, поток взаимной индукции возрастает, и для выполнения условия замороженности магнитного потока идеально проводящего контура в кольцах возникают токи противоположного направления. Такие токи отталкиваются, и, значит, необходимое условие существования планетарной системы не выполняется. Возникает также неустойчивость в направлении, перпендикулярном оси колец.

В точке $C_в$ поток взаимной индукции уменьшается, по условию замороженности потока в кольцах наводятся токи одного направления. Такие токи магнитно притягиваются, и необходимое условие существования планетарной системы оказывается выполнимым. Достигается также устойчивость в направлении, перпендикулярном оси колец. Но по углу между магнитными осями колец в точке $C_а$ устойчивости нет. Ее можно объяснить свойством силы притяжения прямолинейных токов монотонно убывать с увеличением расстояния. Изменению угла между осями одинаковых близкорасположенных колец отвечают сближение одних участков колец и удаление других. Поэтому возникает избыток силы, направленный в сторону возрастания возмущения, что свидетельствует о неустойчивости. Но если кольца удалены, наоборот, устойчивость по углу имеет место (удаленное кольцо как магнитный диполь сгремится ориентировать магнитную ось по силовым линиям поля другого кольца). Поэтому существует некоторое расстояние между центрами соосных магнитно притягивающихся кольцевых токов, которое определяет границу устойчивости и неустойчивости по углу между их магнитными осями. Для планетарной системы одина-

ковых колец такой границей является k »0,61. Укажем на зависимость значения границы устойчивости от вида невозмущенного движения пары колец. Например, если одно кольцо неподвижно, а другое находится в равновесии, границей будет значение k да 0,73 (см. § 8.2).

С увеличением расстояния h (уменьшением модуля k) токовые кольца приобретают свойство системы удаленных токов взаимодействовать по закону диполей 145, с. 137). Это приводит к неустойчивости планетарной магнитной системы (точка C на рис. 33).

Необходимо отметить зависимость верхней кривой области устойчивости на рис. 33 от параметра $p_г$. Для численного расчета были взяты три значения этого параметра: 0,5; I; 2. Значение Pi = 0,5 отвечает полому цилиндру радиуса a, высота которого H в $ИГв$ да 4,25 раза больше радиуса a токового кольца, соосного оси цилиндра (или сплошного цилиндра с H — a $V21$). Значению Px = I отвечает полый цилиндр H = ^6a или сплошной цилиндр H = $3a$. Значению $p_г$ — 2 отвечает тонкое кольцо радиуса a.

§ 10. 3. Устойчивость других магнитных систем

Уравнения приведенной системы (7.47) удобно использовать при изучении устойчивости планетарной системы с другими моделями магнитного взаимодействия. В частности, для вытянутого сфероида и диполя магнитную потенциальную энергию приведенной системы можно получить, используя (6.49) и связи между координатами исходной и приведенной систем (7.38), (7.43). Тогда получим

$$\sim a \Big\backslash \frac{\Lambda dP\,(_T \text{''S}\hat{}\text{ndjSlny}\,_,}{(c^* - r^*)\,(o^* - 1)} \Big|^{\text{Arcth o}\,_\,\circ}_{+} \; \text{т''} \; {}^{\text{'}\,_\text{и}}_{\;\;x} \;]$$

$$\text{X } |\cos \Phi, \cos \Phi, — \text{sln sin } \Phi^* \cos \phi — y)|]. \qquad (10.11)$$

Для сплюснутого сфероида и диполя выражение для энергии U, которое не будем выписывать, находится аналогично, исходя из (6.4I).

Применяя технику предыдущего параграфа, можно показать, что уравнениями движения систем сферой*. — диполь допускаются частные решения, которым отвечает планетарная система с круговыми траекториями центров масс сфероида и диполя. При этом магнитные оси лежат на одной прямой, вращающейся в плоскости траектории. Для существования этих движений центробежные силы орбитального движения необходимо уравновесить магнитным притяжением сфероида и диполя.

Кроме того, аналогично изложенному выше можно получить достаточные условия устойчивости указанных движений. С этой целью полная энергия возмущенной системы, состоящая из потен-

циальной энергии (10 11)" и кинетической энергии, берется в качестве функции Ляпунова, разлагается в ряд Тейлора по малым возмущениям и ищутся условия, при которых квадратичная форма является определенно-положительной функцией.

Опуская выкладки, изложим окончательные результаты указанных операций. Во-первых, система вытянутого сфероида и диполя не является устойчивой — невозможно удовлетворить первому неравенству устойчивой траектории (10.3). Наоборот, для сплюснутого сфероида и диполя первому неравенству (10.3) можно удовлетворить. В частном случае Л! = *А,* = 0 условия устойчивости траектории сплюснутого сфероида и диполя сводятся к неравенству

$$г^* < 3a^1. \qquad (10.12)$$

Ему можно удовлетворить выбором размера невозмущенной траектории *г.* Свойства координат сплюснутого сфероида и условие не- касания диполя к сфероиду (о < *1/Y* 3) определяют ограничение на форму сфероида. Из (10.12) следует, что эксцентриситет сплюснутого сфероида должен быть больше V_s. Это значит, что для менее сплюснутых сфероидов устойчивая траектория невозможна. В частности, не является устойчивой система шар — диполь. Тот факт, что круговая траектория системы шар — диполь не является устойчивой, мог быть доказан, исходя из энергии магнитного взаимодействия двух шаров (формула (6.95)), где размер одного из магнитов необходимо устремить к нулю. Более того, исходя из (6.95), можно доказать, что независимо от соотношения размеров шаров с намагниченностью, параллельной плоскости орбиты, траектория не является устойчивой. Соответствующие громоздкие выкладки здесь приводиться не будут.

§ 10. 4. Об устойчивых планетарных магнитных конфигурациях

Известная идея решения проблемы устойчивости магнитной системы («проблемы основана на учете протяжен ности магнитной частицы. В работах (13—171 теория строится для произвольной формы и распределения дипольного магнитного момента по объему частицы. В данной работе использован иной подход реализации идеи учета пространственной протяженности магнитной частицы. Он заключается в изучении простых, но различных по форме магнитных тел, позволяющих найти точную формулу магнитной потенциальной энергии.

Исследование устойчивости с таким подходом позволило установить прежде всего то, что магнитная система может быть устойчивой. Доказано также, что устойчивая магнитная система является «тесной», т. е. такой, у которой характерный размер траектории свободного тела сравним с размером магнитного тела. Например, магнит ***

***** Для вытянутого сфероида. Если сфероид сплюснут, выражение для *U* иное.**

ный диполь может устойчиво летать по круговой орбите вокруг длинного цилиндрического магнита (оси цилиндра и диполя перпендикулярны плоскости траектории), если диаметр орбиты меньше длины цилиндра.

Исследование устойчивости показало, что она сложным образом зависит от геометрии магнитной системы, размеров траектории центров масс магнитов, положения магнитных осей и геометрии масс свободных тел.

Если магнитные оси перпендикулярны плоскости круговых траекторий центров масс свободных тел и, кроме того, моменты импульсов собственного вращения тел вокруг магнитных осей намного больше момента импульса орбитального вращения, устойчивость планетарной магнитной системы зависит от геометрической формы магнитных тел и размера траектории центров масс. Как следует из табл. 10.1, в которой наглядно представлены результаты гл. 9, устойчивость имеет место для протяженных магнитов с малой площадью магнитного полюса по сравнению с квадратом расстояния между полюсами. Таковы, в частности, длинные цилиндрические магниты, система вытянутый сфероид — диполь.

С увеличением отношения площади магнитного полюса к квадрату расстояния между полюсами магнитные системы уже не являются неустойчивыми. Примерами подобных систем являются магниты в форме сплюснутого сфероида и диполя, два однородно намагниченных шара.

В случае параллельности магнитных моментов тел отрезку, соединяющему центры магнитов, в предположении, что вся масса магнита сосредоточена в его центре, устойчивость конфигурации устанавливается табл. 10.2. Из этой таблицы, наглядно иллюстрирующей результаты гл. 10, следует картина устойчивости, в известной мере обратная картине устойчивости конфигураций табл. 10.1. Для длинных цилиндрических магнитов устойчивая траектория невозможна, в то время как для сплюснутого сфероида диполя траектория устойчива при $R^{a} < 3a^{8}$.

Особое место в табл. 10.1 и 10.2 занимают системы идеально проводящих токовых колец. В данном случае существенную роль играет механизм магнитной потенциальной ямы (см. гл. 4), что расширяет возможности достигнуть устойчивости. Как следует из табл. 10.1 и 10.2, два идеально проводящих кольцевых контура с током образуют устойчивую тесную систему независимо от того, перпендикулярны их магнитные оси плоскости орбиты или же лежат в этой плоскости.

Отметим, однако, что если кольцевые контуры не обладают идеальной электрической проводимостью, выводы об устойчивости изменяются. Для контуров с параллельными осями взаимная индуктивность разлагается в ряд по степеням (аЯ–)^+', начиная с n =1 (а — радиус кольца, R — расстояние; см. (28, с. 1671). Поэтому магнитная потенциальная энергия U, пропорциональная взаимной индуктивности, разлагается в ряд по степеням R^, R^{-5}, ...

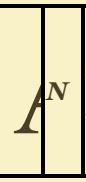
Т а б л и па 10.1

Тип магнитной системы	Эскиз	Область устойчивых траекторий
Два одинаковых длинных магнита	Л 5 *21* J	**2//?-' > 0,425**
Система длинного и малого магнитов (/, > У		**2/t/r* > 0,5**
Вытянутый сфероид — диполь	**ЕМ**	**(/?a_0)-'U > 1//2 (ЯЛ-1) min «в 1,23 <To(°o— 1) = Я*Л—2**
Два магнитных шара		**Независимо от *a*^1 устойчивости нет при любых *R***
Сплюснутый сфероид — диполь	6GZD *N*	**Система неустойчива**
Два идеально проводящих токовых кольца W_a= const	■ !	* 1 Я' Я 2

Таблица 10.2

Тип магнитной системы	Эок“	Область устойчивых траекторий
Два длинных цилиндрических магнита	*Щ*1—-—*Jr*	**Независимо от *lj£*[l] устойчивости нет**
Вытянутый сфероид — диполь	Сёё> *"m*[1]	**Система неустойчива**

Продолжение табл. /о.2

Тип магнитной системы	Эсни»	Область устойчивых траекторий
Сплюснутый сфероид — диполь		***Ro*~~ < *У5***
Диск — диполь	 *и Я* *1* лгал да, а»	**< *УЗ***
Два магнитных шара		**Система неустойчива**
Два идеально проводящих токовых кольца		жду* * 1 ***R*** ■ ***R*** *2

Следовательно, получен «недозволенный» потенциал U—— **, е > 2 с неустойчивыми траекториями. Этот вывод подчиняется общей закономерности табл.** 10.1 **(т. е. устойчивости систем с малым отношением площади магнитного полюса к квадрату расстояния между полюсами; для кольца это отношение, наоборот, большое).**

Если кольца соосны и близко расположены, удобно пользоваться такой формулой взаимной индуктивности [28, с. 1481:

—и-Г | «-!•+ ...|in4--

-2 —к+-£Н'-т®к+ •••] <5**=(i°J3) Тогда в предположении нулевых моментов инерции условие устойчивой траектории S —** $3R^{\sim f}U_r + U_{rr}$ **°, записанное относительно £, имеет вид**

/д 45 м , 105 . \. 4 13 , 261 м

(6-—— Е' + -lg-«'+ •••)1лт~--+-5-?-

1й1 **? F+ >** **(10.14)**

В интервале 0 < £ 1 оно удовлетворяется, если

5 > 0,85. **(10.15)**

Поэтому траектория тесной планетарной системы соосных токовых колец, не обладающих бесконечной электрической проводимостью, устойчива, что отвечает общей закономерности табл. 10.2 (устойчивые системы имеют большое отношение площади полюса к квадрату расстояния между полюсами).

Глава 11

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

§ 11. 1. Опыт орбитального полета свободного магнита

Наряду с теоретическим доказательством устойчивости планетарных магнитных систем представляет интерес экспериментальное обоснование устойчивости орбитального движения. Эта работа была начата с разработки различных установок, в которых предусматривалось создание орбитального движения постоянного магнита относительно неподвижных магнитов в контакте с элементами конструкции с последующим искусственным или естественным устранением этого контакта.

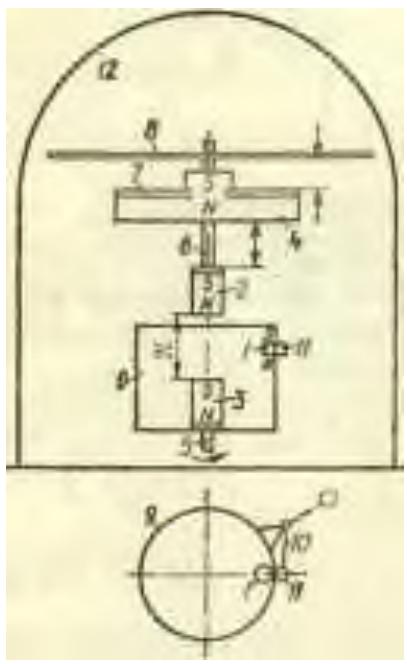


Рис. 34

Рассмотрим более подробно схему конструкции на рис. 34. Магнитная система состоит из дискового магнита *1* (диаметр 7 мм), предназначенного для свободного орбитального полета, неподвижных цилиндрических магнитов *2, 3* (диаметр 15 мм, высота 50 мм), кольцевого магнита *4* (диаметр $D_{,,}$ — = 90 мм и $D_{e„}$ = 40 мм, высота 10 мм), стержней 5, *6,* диска 7 и крышки *8.* Для настройки магнитной системы в установке можно было изменять размеры, отмеченные линиями со стрелками. Магниты намагничены в направлении, показанном буквами *N* и S.

Стержни 5, *6,* диск 7 и крышка *8* были изготовлены из обычной магнитомягкой стали, а магниты *1—3* — из анизотропного оксидно- бариевого феррита 2БА с преимущественными магнитными свойствами в направлении оси установки.

Для запуска на орбиту использовался тонкий диэлектрический стакан *9* (диаметр 60 мм) с медным рычажком *10* и стальным грузиком *11.* Грузике рычажком мог поворачиваться в горизонтальной плоскости. Стакан *9* приводился во вращение электродвигате-

лем. Под съемным стеклянным колпаком *12* мог создаваться вакуум.

Перед запуском магнит *1* вручную устанавливался на внутреннюю цилиндрическую поверхность стакана *9* в зоне контакта грузика *11* с наружной поверхностью стакана. Притяжение между грузиком *11* и магнитом / было сильнее притяжения магнита *1* к неподвижным магнитам *2,3* вследствие большего удаления от оси установки. Поэтому магнит *1* при неподвижном и медленно вращающемся стакане *9* удерживался на его внутренней поверхности.

При раскрутке стакана до 300 об/мин грузик *11* отрывался от наружной поверхности стакана и занимал положение, показанное пунктиром. Магнит *1* при этой скорости удерживался центробежными силами на внутренней поверхности стакана. По мере уменьшения скорости до $n_д$ = 220 об/мин центробежная сила магнита уменьшалась настолько, что притяжение неподвижных магнитов «вытягивало» его на орбиту без контакта со стаканом *9*, после чего стакан останавливали.

Возможность устойчивого орбитального движения небольшого магнита в поле неподвижных магнитов установки на рис. 34 считалась обоснованной по следующим соображениям Поскольку размеры магнита *1* намного меньше расстояния между разноименными полюсами *N* и S магнитов *2* и *3* (последнее могло устанавливаться в диапазоне от 70 до 90 мм), предполагалось, что магнитное взаимодействие в установке аналогично взаимодействию двух неподвижных магнитных зарядов разного знака («гантели») и магнитного диполя.

По теории (см. (9.7) и табл. 10.1) круговая траектория свободного магнитного диполя является устойчивой, если диаметр орбиты меньше расстояния между магнитными полюсами неподвижного цилиндрического магнита (т. е. расстояния *21* на рис. 34).

Поэтому для устойчивости орбиты необходимо было не превысить предел 70 мм (внутренний диаметр диэлектрического стакана *9*).

Сначала опыты проводились без вакуума. Свободные полеты начинались с нескольких витков — спиралевидных траекторий, заканчивавшихся падением либо на магниты *2, 3, 6,* либо вниз на основание установки. После настройки магнитной системы время свободного полета удалось увеличить до нескольких секунд. В отдельных опытах магнит сначала двигался по закручивающейся спирали, затем размер орбиты увеличивайся и снова орбита превращалась в спираль с концом на неподвижных магнитах. Наблюдались также полеты по спирали с одновременными вертикальными колебаниями, причем их амплитуда на начальных витках была обычно больше, чем на последующих.

После того как без вакуума было достигнуто несколько секунд полета, опыты начали проводить в вакууме. Оказалось, что степень разрежения воздуха под колпаком заметно влияет на время свободного полета. Оно начало увеличиваться, и, наконец, при вакууме ш

10-3 мм рт. ст. удалось осуществить три опыта со временем свободного полета 5 мин 58 с, 6 мин 2 с и 6 мин 35 с [и]

Свободный полет в этих опытах представлял собой следующее. В течение 0,5—1,0 мин плоская круговая траектория магнита располагалась несколько ниже середины расстояния между магнитами *2, 3* и практически не изменялась. Затем радиус R траектории начинал постепенно уменьшаться от 30 до 25 мм, а скорость вращения постепенно увеличивалась от n « 230 до n *яз* 250 об/мин.

Уменьшение радиуса траектории от 25 до 10 мм длилось 4— 4,5 мин и сопровождалось постепенным подъемом плоскости полета и увеличением скорости вращения до п я= 3004- 350 об/мин. Кроме того, изменялся угол между магнитными осями свободного магнита *1* и магнитов *2, 3*. В начале свободного полета он составлял около 10°, при R = 10 мм оси были практически параллельными

По мере уменьшения радиуса траектории, начиная с R = 10 мм, в полете возникали колебания свободного магнита в вертикальном направлении с частотой того же порядка, что и скорость орбитального вращения. Их амплитуда постепенно увеличивалась, и, наконец, при /? =■ 5 мм магнит / падал на полюс магнита *2* или *3*.

§ 11. 2. Анализ опыта орбитального полета

Прежде всего необходимо отметить несоответствие теории и эксперимента. В теории устойчивости орбитального движения магнита (гл. 9) не учитывалась диссипация энергии, которой в опытах подобного типа не избежать. В ней оказывалось возможным существование невозмущенных круговых орбит, тогда как в опытах магнит двигался по некоторым спиралевидным траекториям.

В принципе теория могла быгть изложена с некоторой моделью диссипации энергии. Однако это удалило бы ее от положения, которое она хочет доказать: возможность устойчивости конфигурации в консервативной системе.

Можно было попытаться приблизить опытную систему к идеальной, уменьшив потери энергии вследствие движения магнита или организовав подпитку, компенсирующую диссипацию энергии в системе. Однако уменьшение потерь не может быть сведено к нулю, а подпитка затрудняет воздействие на систему таким образом, чтобы осуществлять только компенсацию потерь.

Кроме указанного несоответствия теории и описанных опытов необходимо указать еще и на то, что теоретически изучались чисто магнитные системы, в то время как опыт орбитального полета осуществлен при наличии силы тяжести, направленной по оси неподвижных магнитов.

“ Опыты поставлены автором совместно с А. С. Кнсельгофом, Ф. А. Котеневым под руководством А. Н. Миляха в 1970 г.

Покажем влияние силы тяжести на простом примере движения свободной точки по окружности, притягиваемой к неподвижному центру некоторой силой P по закону обратных квадратов Кроме силы P на точку действует постоянная сила тяжести G перпендикулярно плоскости орбиты. Потенциальная энергия

$$U \quad \text{---------- } C_\text{—ь } Gz \lceil C = \text{const} > 0), \qquad (11.1)$$
$$(\text{ра} + \text{г»})\ \blacksquare$$

где р, $г$ — цилиндрические координаты точки. Возможность невозмущенной траектории р = R, $г$ = г„ очевидна, а достаточными условиями ее устойчивости являются неравенства

$$\text{З/Г'Ю.} + \text{Ц»} > 0,\ U_a > 0.$$

где Up, $Ирр$, Ua — соответствующие частные производные потенциальной энергии, вычисленные в точке р = R, $г$ — $гр$. Нетрудно показать, что первое из написанных равенств выполняется всегда, второе — при условии $R > Z_0$ К2. Последнее неравенство эквивалентно следующим неравенствам сил P, $б$и центробежной силы P_u:

$$GP\sim^{l} < 0{,}707,\ GP\sim < 0{,}578. \qquad (11.2)$$

Если бы закон силы P был дипольным (обратно пропорционально четвертой степени расстояния), неравенства сил были бы такими-

$$\text{СР7} < \text{4-.}\ \text{GP"'} < 0.48. \qquad (11.3)$$

Закон взаимодействия длинных цилиндрических магнитов, как уже обсуждалось в § 9 1, может изменяться от дипольного $U = = —IIR9$ (расстояние намного больше размера большего магнита) до кулоновского $U = —\sqrt{R}$ (расстояние намного меньше размера магнита) Поэтому из написанных неравенств следует, что для реализации устойчивой траектории в магнитной конфигурации, находящейся в гравитационном поле, перпендикулярном плоскости орбиты, магнитное притяжение должно превышать тяжесть свободного магнита по крайней мере в УЗ -s- I 5 = 1,73 — 2,23 раза.

В опытах свободный полет магнита начинался с радиуса орбиты R = 3 см и скорости вращения n ® 2 0 об/мин. Поэтому отношение магнитной силы к весу в начале свободного полета состав- тяло приблизительно 1,78 и с уменьшением витков увеличивалось. Это подтверждает выполнимость устойчивости по вертикали, если взаимодействие кулоновское (1,78 > 1,73), и отрицает возможность устойчивости для дипольного взаимодействия (1,78 < 2,23).

Естественно, закон потенциальной энергии в рассмотренном примере не соответствует закону взаимодействия экспериментальной магнитной системы. Поэтому приведенные соображения не могут претендовать на количественную точность. Одиако они показывают, насколько существенным оказывается наличие силы тяжести

Исходя из вышеизложенного необходимо заключить, что в теории и опытах приходится изучать свойства не одной, а различных динамических конфигураций, причем достижение полного соответствия между ними создает принципиальные трудности. Поэтому вывод теории об устойчивости *круговой* **орбиты не может быть проверен экспериментально, и в этом смысле опыт орбитального полета излишен. Однако, поскольку аналогичные опыты с магнитами, по-видимому, осуществлены впервые, представляет интерес выяснить вопрос об устойчивости того движения, которое было в опыте и которое не изучено в теории.**

Рассмотрим вопрос об устойчивости движения магнита, пролетавшего в течение 5 мин в постоянном магнитном поле неподвижных магнитов без какого-либо искусственного воздействия на этот полет. Чтобы иметь право говорить об устойчивости движения, заканчивающегося падением на притягивающий центр, необходимо подчеркнуть, что в изучаемых магнитных конфигурациях, как и в планетных 1241 и спутниковых задачах [5], имеет смысл рассматривать вопрос об орбитальной устойчивости, т. е. способности движущегося объекта сохранять предписанную уравнениями движения траекторию. Если таковой является окружность, магнит стремится остаться на окружности, если это спираль (как в опыте с полетом магнита, где из-за неидеальности системы окружность не может быть достигнута),— для устойчивости траектории необходимо установить способность сохранять спиральную траекторию.

Главное неудобство изучения устойчивости спирали заключается в том, что трудно установить её уравнение (т. е. определить уравнение спирали как частное решение уравнений движения, в которых учтена диссипация энергии). Поэтому с целью упрощения анализа устойчивости в опыте можно поступить следующим образом. Допустим сначала, что в опыте потерь нет, а магнитный потенциал имеет вид $U = -1R3$ **т. е. такой, какой используется в [75] (на основании этого закона сделан вывод о неустойчивости динамической конфигурации с магнитным взаимодействием). Тогда можно воспользоваться уравнением траектории точки в центральном поле [45, с. 45]:**

$$t = \mathbf{J\,(2m\sim'\,|£ - U\,(Я)]\,-\,Mm''^{2}/rV',dR + C,}$$

$$\mathbf{Я = (р« + г*)''} \qquad \mathbf{(11.4)}$$

(/ — время; m **— масса;** E **и** M **— значения интегралов полной энергии и момента импульса;** C **— постоянная интегрирования; р,** $г$ **— цилиндрические координаты точки) и оценить время, за которое размер траектории магнита уменьшится от** Rt **= 0,8**R_o **до R, =** $0{,}3R_o$ **(**Ro **= 3 см — первоначальный радиус орбиты свободного полета) Так как**

$$E = -i- \quad \text{---- } 5\text{- mRoo} = -4\text{- } mRocm$$

$$M = mfatotn \text{ (й« } \mathbf{33{,}5c} \qquad \mathbf{(11.5)}$$

(о)о — начальная угловая скорость вращения по орбите), то, вводя $x = RR7^{1}$, с учетом (11.5) преобразуем уравнение (11-4) к виду

<1'6>

где C = 0, имея в виду начало отсчета времени с положения -| = = R_tRo^{1} = 0,8 < 1- Из (11.6) следует, что / 0,06 с- Таким об разом, если бы свободный магнит притягивался по закону, на основании которого утверждается лимнтационность движения пары магнитных моментов [15], уменьшение размера траектории от 0,8 до 0,3 первоначальной орбиты свободного полета произошло бы за несколько сотых секунды- В опыте это время имеет порядок минуты, что на три порядка не соответствует теории движения магнитных моментов (15]. Поэтому данные опыта доказывают, что в экспериментальной магнитной системе реализуется взаимодействие не с потенциалом $U = — 1/R^{S}$.

Однако это еще не означает, что движение устойчиво. В опыте могло быть реализовано взаимодействие с потенциалом U = —1//?^{e}, где 2 < е <3, который также является «недозволенным». Поэтому важно оценить время t для потенциала U = —a/R^{2+e}j, где а =■ = const > 0, — 0. Можно показать, что в этом случае вместо фор мулы (11.6) получим

$$t = V2\ (\text{е,и<Г' J (x}^{2} \text{— 2 In x — lF'xdx} \qquad (11.7)$$

или

$$\sim 1\ (\text{x, = 0,8; x}_{8} \text{= 0,3}). \qquad (11.8)$$

Отсюда следует, что в идеальной системе с «недозволенным» потенциалом U = —1 //?^{2}+е[, в, -»• 0, время полета может быть как угодно большое. Поэтому время «жизни» магнита на орбите не может быть аргументом для доказательства устойчивости, так как за счет как угодно малого в! во взаимодействии, принципиально не допускающем устойчивости, оно может быть как угодно большим.

Предположим теперь, что в опыте было реализовано взаимодействие с «дозволенным» потенциалом, а падение произошло вследствие аэродинамического торможения. Для оценки тормозящего механического момента K, вызвавшего падение магнита за пять минут, воспользуемся уравнением

$$(\text{тр}^{2}\text{а}) = K, \qquad (\text{П-9})$$

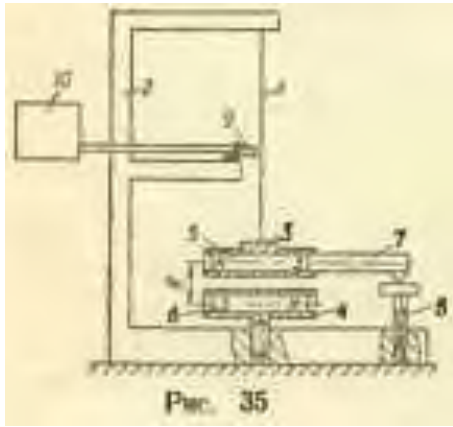
полагая, что угловая скорость a = const = со (в опыте скорость вращения увеличивалась от 230 до 350 об/м). Тогда

$$\text{d(p')}\ \text{£•=. /C (mtoF'd 1o} \qquad (\text{П-10})$$

K = mRlor' да 0,7 г • 33.бс⁻' • 3⁺' см⁺,' • ЗГГ'<"' ~ 10~' Г • см.

С другой стороны. используя (881. можно показать. что в опытах с полетом магнита при вакууме порядка КП* мм рт. ст. имело место обычное газодинамическое течение (число Маха М » 0.5. число Рейнольдса Re да 0,05). Это позволяет для оценки момента аэродинамического торможения использовать формулу силы сопротивления движению в вязкой жидкости (42. с. 757|:

$$/C = PR_{„} = 6\text{npdw}_0R_0 \cdot 6 - я - 1.27 \cdot 10^{"7}\ Г \cdot с \cdot см\sim' X$$
$$X\ 0.7\ см \cdot 33.5с^{-1} \cdot З_2\ см^4 \sim 10^{-з}\ Г \cdot см. (11.11)$$



где р = |.27 -10 Г • с • см ᵀ — динамическая вязкость воздуха при давлении 1,38 • 10^ мм рт. ст.

Сравнение моментов K и $K\backslash$ показывает. что это величины одного порядка. Поэтому падение магнита мог вызвать тормозящий момент аэродинамического торможения. Именно мог вызвать. а не вызвал. потому что опытом орбитального полета нельзя дока* зать. что в системе реализовано взаимодействие с потенциалом. который

Таким образом. для вывода об устойчивости кроме опыта орбитального полета необходимо доказать принадлежность магнитного потенциала к классу «дозволенных» $U = —_1/R^e$. е < 2.

не только не имеет вид U-------- ₁/R3. но и не принадлежит к типу $U =$ = —l/R²⁺ᵉi. где е, -* о (т. е. приближается к граничному потенциалу $U =$ —l/Rˢ). Отметим. что в опыте с пятиминутным полетом показатель степени отличается от двойки лишь на миллионную долю.

Один из способов доказательства заключается в измерении магнитной силы притяжения Р. в зависимости от расстояния между магнитными осями R и сравнении полученного графика с кривыми. построенными по закону изменения центробежной силы /?2 = const R^. Устойчивость имеет место тогда. когда в точке пересечения графиков сил P_2 и P_t более пологой является кривая силы Р|. Если использовать логарифмическую шкалу. силам Р2 будет соответствовать пучок параллельных прямых lg Р2 = const — — 3 lg R. Этот способ доказывает устойчивость конфигураций с большими моментами импульсов собственного вращения магнитов. т. е. когда вопрос об устойчивости сводится к устойчивости траектории.

Для определения закона магнитной силы в зависимости от расстояния между магнитами использовалась установка. схематически показанная на рис. 35. К тонкой стальной струне *1* (00.15 мм.

I — 300 мм), подвешенной к основанию *2*, закреплялся немагнитный корпус *3* с магнитом *5*, а в корпусе *4* — магнит *6*. Корпус *3* жестко связан с немагнитным рычагом 7, который своим концом шарнирно опирался на винт *8*, предназначенный для регулирования горизонтальной установки магнита *5*. Электромагнитный вибратор *9* и генератор-измеритель частоты *10* возбуждали резонансные колебания струны в зависимости от расстояния между магнитами *R*

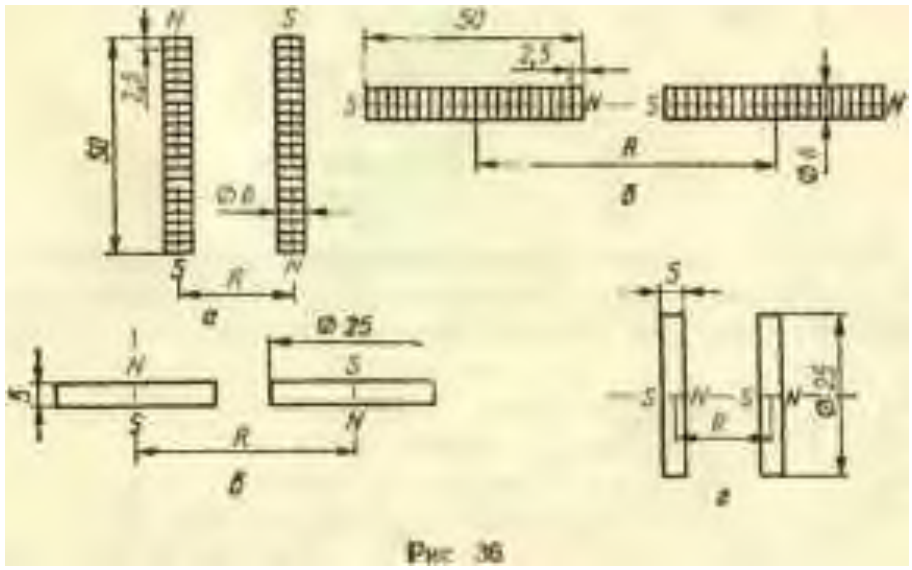


Рис. 36

Гак как резонансная частота колебаний зависит от натяжения струны, то, замеряя эту частоту, можно определить силу притяжения между магнитами *5* и *6*.

Экспериментальное определение силы струнным методом было проведено на системах из самарий-кобальтовых магнитов (рис. 36). Из магнитных дисков 0 6 мм и высотой 2,5 мм были созданы длинные цилиндрические магниты (рис. 36. а, б) (0 6 мм, / — 50 мм). Они эквивалентны рассмотренной в § 9.1 системе двух цилиндрических магнитов. Магнитным дискам на (рис. 36, *в, г)* эквивалентны два одинаковых токовых кольца, не обладающих идеальной электрической проводимостью. •

Экспериментальные данные магнитной силы приведены ниже:

Система магнатов, рис. ft. *о*

P. **Г**	156		113	84		68	56	48	39	34
R, **мм**	7		8	9		10	11	12	13	14
P. **г**	30	26		22,5	21			15	13	10
R, **мм**	15	16		17	18		21		23	26

Система магнитов, рис. 36, *б*

P. **г**	438	276	190	134	100	*77*	57	44	36	30
R, **мм**	51	52	53	54	55	56	57	58	59	(0

Системе магнатов, рнс. 36, *в*

***P*, г**	**840**	**570**	**410**	**315**	**250**	**203**	**166**	**136**	**115**	**97**	**80**
/?.мм	**25,1**	**26,1**	**27,2**	**28,3**	**29,4**	**30,4**	**31.4**	**32,4**	**33,4**	**34,4**	**35,5**

***P*, г**	**73**	**62**			**47**	**37**	**30**	**24**	**18**	**16**	**12**	**11**
***R*, мм**	**36,5**	**37,5**	**39,5**	**41,5**			**43,5**	**45,5**	**47.5**	**49,5**		**51,5**	**53,5**

гннто рис. 36, а

***P*, г**	***R*, мм**	**1450**	**1200**	**1004**	**856**	**720**	**622**	**542**	**474**	**414**
		0,9	**1,0**	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1,4**	**1.6**	**1,6**	**1.7**

***P*, г**	**370**	**328**	**284**	**256**	**220**	**202**	**176**	**162**
***R*, мм**	**1.8**	**1.9**	**2.0**	**21**	**2,2**	**2,3**	**2,4**	**2,5**

***P*, г**	**143**	**138**	**126**	**114**	**102**	**94**	**87**	**84**
***R*, мм**	**2,6**	**2,7**	2,8	**2,9**	**3,0**	**3.1**	**3,2**	**3,3**

На рис. 37 в логарифмической шкале показаны графики магнитных сил. Кривым *а* — *г* отвечают соответствующие системы магнитов рис. 36. Сплошные параллельные прямые *1* на рис. 37 описывают предельное

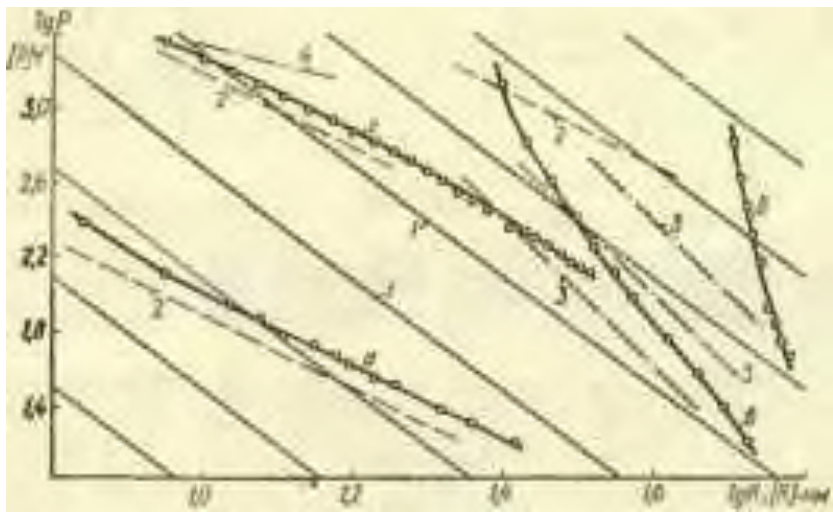


Рис. 37

взаимодействие $U = -1/R2$ пунктирные *2* — кулоновское взаимодействие $U = -1/7?$, штрихпунктирные прямые *3* — дипольное взаимодействие U 1//?[a].

Система длинных магнитов на рис. 36, *а* обладает устойчивостью, поскольку кривая *а* на рис. 37 более полога, чем прямые *1*. Это находится в соответствии с теорией § 9.1 (см. также табл. 10.1). В измеренном диапазоне взаимодействие этих магнитов почти кулоновское (наблюдается - параллельность прямой *2* и кривой а). В эксперименте не удалось установить границу перехода от устойчивости к неустойчивости, которая наступает, когда размер магнита *21* меньше 0,425 диаметра орбиты $2R$ (см. (9.6)). Это связано с трудностью точного замера малых магнитных сил в опытной установке (порядка 0,1 Г).

Система магнитов на рис. 36, *б* эквивалентна изучавшейся в § 10.1 теоретической модели с размещением магнитных моментов в плоскости траектории центров масс магнитов. Для такой конфигурации неравенства устойчивой траектории могут быть использованы условно, когда можно считать всю массу магнита сосредоточенной в одной точке Тогда становится законным способ определения устойчивости, который здесь используется. Из сравнения кривой *б* и прямых *1* на рис. 37 видно, что эксперимент отрицает возможность устойчивости для системы магнитов на рис. 36, *б.* Это находится в соответствии с выводом § 10.1 и табл. 10.2.

Система дисковых магнитов на рис. 36, *в* не обладает устойчивостью, так как кривая *в* идет более круто, чем прямые *1*. Теория (§ 10.4) делает такой же вывод для этой системы.

Напротив, дисковые магниты на рис. 36, *г* (кривая *г* на рнс. 37) и токовые кольца, магнитные моменты которых параллельны отрезку, соединяющему центры колец, допускают выполнение неравенства $3R^{-I}U, + > 0$. В § 10.4 для выполнения этого неравенства было получено условие 2a/?o'' > 0,85, где 2a — диаметр токового кольца; R — расстояние между центрами колец (.диаметр невозмущенной орбиты). Условие для дисковых магнитов, получаемое из эксперимента сравнением наклона кривой *г* и прямых *1* на рис. 37, имеет такой вид: 2a/?o'* > 0,84. Этот факт говорит о том, что теория и эксперимент одинаковы не только в выводе об устойчивости, но и дают приблизительно совпадающие результаты по размеру области устойчивости

§ 11. 3. Опыт по проверке условий существования магнитной ямы [35] [24]

Полученные выше (§ 4.2, 4.3) необходимые и достаточные условия существования минимума потенциальной энергии магнитного взаимодействия идеальных токов для двух одинаковых контуров сводятся к условию — У, УТ[1], где L_n — взаимная индуктивность контуров в положении магнитной ямы; L — собственная ивдуктивносгь; У, и $У_2$ — замороженные потоки контуров (У, < < $У_2$). Это условие может быть выполнено, если поток одного контура является потоком взаимной индукци другого контура. Поэтому опыт по проверке условий существования магнитной ямы мо- жеть быть проведен по такой схеме. В Монтуре *2,* который удобно сделать неподвижным, возбуждается некоторый начальный ток /$_0$. Пусть при этом поток контура *2* будет $У_а$. Такой же контур /, который может изменять свое положение относительно контура *2, в* процессе заведения тока в контуре *2* фиксируется на некотором расстоянии $h = h_o$ от контура *2*. Если каким-либо способом нарушить идеальную проводимость контура /, то наличие контура *1* в эоне †††

††† Опыт выполнен И. Д. Коло н М. И. Крюковым.

магнитного поли контура *2* не скажется на поле контура *2.* С контуром / будет связан потооЧУ магнитного поля контура *2,* который, по определению, так относится к потоку Ч\, как взаимная индуктив ность относится к индуктивности *L.* Это значит, что данная геометрическая конфигурация контуров отвечает положению магнитной потенциальной ямы, если в процессе возбуждения незатухающего тока в одном контуре другой контур временно лишается

Р.н >

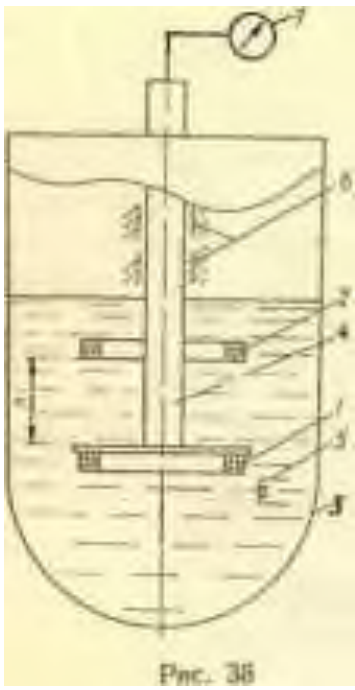
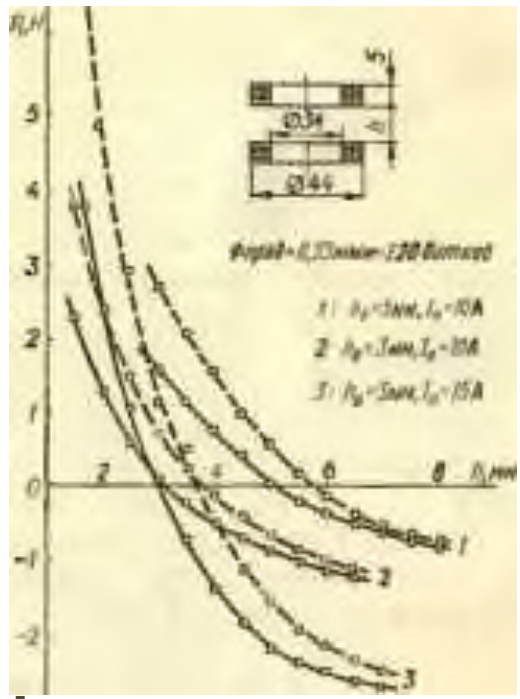


Рис. 38



-5

Рис. 39

идеальной электрической проводимости. Исходя из этого, опыт по проверке условий существования магнитной ямы был проведен по следующей методике. Установка (рис. 38) состояла из гелиевого криостата *3,* неподвижной сверхпроводящей катушки *2,* подвижной сверхпроводящей катушки *1,* немагнитного штока *4,* теплового ключа 5, опоры *6* и измерителя силы 7. Устройства для заведения незатухающего тока в обмотку катушки *2* и фиксации катушки *1* относительно катушки *2* на рис. 38 не показаны. Внешний диаметр короткозамкнутых катушек *1,2* равен 44 мм, внутренний — 34 мм, толщина катушек 5 мм, число витков 220 Использовался медненный провод диаметром 0,33 мм из сплава 65БТ.

Опыт проводился по такой схеме. Сначала подвижная катушка *1* фиксировалась в положении, когда зазор между близлежащими торцами катушек *h* = Л, Затем обмотка катушки *1* тепловым ключом *5* переводилась из сверхпроводящего в нормальное состояние. При этом в обмотке неподвижной катушки *2* возбуждался незату

хающий ток /о. После возбуждения тока /о тепловой ключ *5* отключался Последний этап эксперимента — расфиксация катушки *1* и измерение силы взаимодействия катушек *1 и 2 в* зависимости от расстояния ft при помощи устройства 7.

Графики силы взаимодействия катушек для различных значений ft и /о показаны на рис. 39. Сила взаимодействия P между катушками в этом опыте состояла из силы взаимодействия токов, протекающих по обмоткам короткозамкнутых сверхпроводящих катушек (силы идеальных токов PJ, и силы, обязанной идеальному диамагнетизму обмоток катушек (диамагнитной силы $P2$ Для выделения диамагнитной силы Я был поставлен другой опыт, отличающийся от описанного тем, что небольшой участок обмотки катушки / все время оставался в нормальном состоянии. После измерения силы P_2 для фиксированного ft из измеренных данных силы P первого опыта вычитались данные P_s второго опыта.

Из рис. 39 следует, что нуль магнитной силы взаимодействия идеальных токов и изменение знака взаимодействия идеальных токов отвечают положениям между катушками Л =Ло, т. е. тем положениям, где выполняется условие существования ямы по теории.

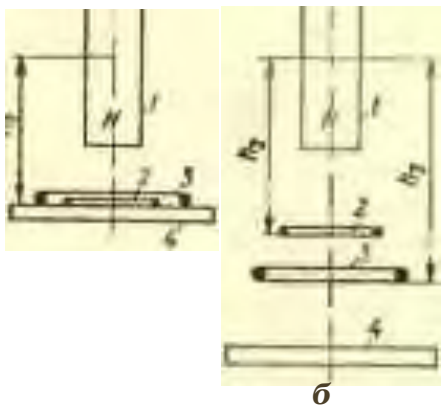
§ 11. 4. Опыт устойчивого равновесия

Охлаждение витка ниже температуры сверхпроводящего перехода с размещенным внутри витка магнитом замораживает в витке отличный от нуля магнитный поток, что приводит к особенности магнитной силы притяжения (при вытягивании магнита она увеличивается, достигая максимума, а затем монотонно убывает до нуля, см. рис. 1). Это можно использовать для создания устойчивого равновесия свободного тела (при наличии силы тяжести). Однако в работе [91] опыт устойчивого равновесия, основанный на использовании сил притяжения, не был поставлен. В экспериментальной части [91] использовалась магнитная сила отталкивания контура с нулевым замороженным потоком, что не обеспечивает боковую устойчивость. Поэтому для достижения устойчивости вместо кольца был применен конус (как диамагнетик).

В гл. 8 была исследована устойчивость равновесия одного и двух свободных тел в магнитной потенциальной яме. Из полученных резу льтатов следует, что для устойчивости равновесия необходимо использовать силы притяжения на участке их возрастания при увеличении расстояния. Кроме того, необходимо обеспечить устойчивость по углу между магнитными осями. Условие устойчивости по углу зависит от геометрии магнитной системы.

Для качественной демонстрации теории гл. 8 были проведены опыты свободного равновесия двух сверхпроводящих колец в поле постоянного магнита цилиндрической формы (рис. 40). Сначала в теплой зоне магнит *1,* ниобиевые кольца *2, 3* и подставка *4* размещались, как показано на рис. 40, *а.* Затем вся система помещалась в жидкий гелий, и подставка *4* медленно опускалась по отношению

к магниту. По мере опускания подставки кольца *2, 3* заняли свободное положение, показанное на рис. 40, б. Свободное равновесие отчетливо наблюдалось в стеклянном дьюаре, имевшем непосе- ребренную полоску. Равновесие возмущалось вибрацией корпуса и сторонним магнитом, который подносился к системе магнита и колец и затем удалялся от них. Во всех случаях возмущений визуально наблюдались изменения положений колец (сложные колебания), которые после устранения возмущений постепенно исчезали.



б

Рис. 40

Принципиальное отличие магнитной силы поставленного опыта по сравнению с особенностью силы в [91] указано выше (см. § 1.3). Кроме того, в [91] не поставлен опыт, в котором устойчивость равновесия обеспечивается идеальной проводимостью сверхпроводника, а не его идеальным диамагнетизмом. Опыт равновесия двух свободных тел в неуправляемой магнитной системе не описан [11].

В опыте использовались самарий-кобальтовые магниты в виде диска диаметром 6 мм и высотой 2 мм. Из них был выбран цилиндр высотой 18 мм. Масса меньшего ниобиевого кольца 0,19 г, внутренний диаметр 10 мм, толщина 0,5 мм. Масса большего кольца 0,35 г, внутренний диаметр 15 мм, толщина 0,5 мм.

Зависимость зазоров свободного равновесия колец от начального зазора показана на рис. 41. При $ho \sim 17{,}5$ мм равновесие колец оказывалось невозможным, так как при ho 17,5 мм максимальная магнитная сила становится меньше силы тяжести колец.

Устойчивость в вертикальном направлении обеспечивается тем, что магнитное притяжение колец на участке [$Л_o$, kJ или [ft«, $й_a$] увеличивается с ростом R. В боковом направлении устойчивость достигается благодаря притягивающему характеру магнитной силы, а устойчивость по углу между магнитными осями — тем, что диаметр магнита достаточно мал по сравнению с размерами колец.

[11] В известной двойной подвеске Бнмса [29] использована система стабилизации с обратной связью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика.— М. : Физматгиэ, I960.— Т. 2. 488 с.
2. *Аркадьев В. К-* Избранные труды.— М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1961.— 331 с.
3. *Бандурин В. В., Зиновьев А. С., Козорез В. В.* Поле системы двух идеальных шаровых магнитов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 4, с. 295—300.
4. *Бандурин В. В., Зиновьев А. С.. Козорез В. В.. Лишенко А. М., Чеборин О. Г.* Об устойчивости равновесия свободного маятника в магнитной потенциальной яме.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, Ns 6, с. 478—482.
6. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс,— М. : Наука, 1965,— 416 с.
6. *Вертинов А. И.* Магнитные и магнитогидродинамические опоры: (Обзор).— *М.*: Энергия, 1968.— 191 с.
7. *Бете Г., Гофман Ф.* Мезоны и поля,— М. : Изд-во иностр. лит., 1967.— Т. 2. 514 с.
6. *Брагинский В. Б.* Физические эксперименты с пробными телами.— М. : Наука, 1970,— 136 с.
9. *Вуккекь В.* Сверхпховодидосп>.— М. : Мир, 1975.— 363 с .
10. *Бухгольд Т.* Сверхпроводящие гироскопы.— В кн.: Проблемы гироскопии / Под ред. Г. Циглера. М. : Мир, 1967, с. 119—128.
11. *Бухгольц Г.* Расчет электрических н магнитных полей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 712 с.
12. *Гильберт В.* О магните, магнитных телах и о большом магните — Земле.— М. : Изд-во АН СССР, 1956.— 411 с.
13. *Гинзбург В. Л.* К тхороо взаимодействия мезона с электромагнитным полем.— Журн. экстрим. н теорет. физики, 1941, 11, вып. 6, с. 620—630.
14. *Гинзбург В. Л.* К теории возбуждетшых спиновых состояний элементарных частиц,— Журн. экстрим. н теорет. физики, 1943, 13, вып. 1/2, с. 33—56.
15. *Гинзбург В. Л.* Теория мезона н ядерные силы,— В кн.: Мзон / Под ред. И. Е. Тамма. М. : Гостехиздат, 1947, с. 227—270.
16. *Гинзбург В. Л.* К теории наклонного магничм ого ротатора и хх применении к теории частиц с высшими спинами.— В кн.: Проблемы теоретической физики : (Памяти И. Е. Тамма). М. : Наука, 1972, с. 192—198.
17. *Гинзбург В. Л., Тамм И. Е.* К теории спина.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1947, 17, вып. 3, с. 227—237.
18. *Гобсон Е. В.* Теория сферических н эллипсоидальных функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— 476 с
19. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений,— М. : Фнзматгнз, 1962.— 1100 с.
20. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М. : Изд-во АН СССР, 1948.— 728 с.
21. *Данилин В. П.. Мартыненко Ю. Г.. Новожилов И. В.* Зависимость времени

выбега электростатического гироскопа от дебаланса ротора — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1970, № 2, с. 20—22

22. *Денисов Г. Г., Урман Ю М.* Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 6, с. 5—14.

23. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел.— Бюл. Ин-та теорет. астрономии, 1960, 7, с. 511—520;

24. *Дубошин Г. И.* Небесная механика : Основные задачи и методы.— М. : Наука, 1977,— 780 с.

25. *Дью-Хьюз Д.* Технические сверхпроводящие материалы.— В кн.: Сверхпроводящие машины и устройства / Под ред. С. Фонера. Б. Шварца М. : Мир, 1977. с. 107—160.

26. *Иваса И.* Высокоскоростной общественный наземный транспорт на магнитной подушке.— В кн.: Сверхпроводящие машины и устройства / Под ред. С. Фонера, Б. Шварца. М. : Мир, 1977, с. 370—421.

27. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация.— М. : Наука, 1976.— 670 с.

28. *Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.* Расчет индуктивностей,— М.; Л. : Госэнергонздат, 1955.— 368 с

29. *Кацнельсон О. Г., Эдельштейн А- С.* Магнитная подвеска в приборостроении.— М.; Л. : Энергия, 1966.— 94 с.

30. *Киттель Ч., Найт У.. Рудерман М.* Механика.— М. : Наука, 1975.—480 с.

31. *Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н.. Черноусько Ф. Л.* О движении гироскопа с неконтактным подвесом.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, № 2, с. 3—8

32. *Коэорез В. ВО* аадаче двух магнитов.— Изв. АН ССС Р. Механика твердого тела, 1974, *Г* 3, с. 29—34.

33. *Коэорез В. В.* Об устойчивости орбитального движения дв\ х свободных магнитов.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 1, с —13.

34. *Коэорез В. В.* Об устойчивости орбитального движения свободного магнитного диполя в поле эллипсоида.— Докл. АН СССР, 1977, 232, № 5, с. 1055— 1057.

35. *Коэорез В. В., Колодеев И. Д.. Крюков М. И.. Ляшенко А. М., Рашко- ван В. М., Чеборин О. Г.* О потенциальной яме магнитного взаимодействия идеальных токовых контуров — Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 3, с. 248— 249.

36. *Коэорез В. В.. Чеб>рин О. Г.* Об устойчивости равновесия в системе двух идеальных токовых колец.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 1, с. 80—81.

37. *Коэорез В В., Чеборин О. Г.* Об устойчивости орбитального движения двух снободных идеально проводящих токовых колец.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 10, с. 932—934.

38. *Коэорез В. В.. Чеборин О. Г. Об* одном коллинеарном случае задач: трех магнитов,— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 11, с. 995-И8.

39. *Корн Г., Корн Т.* Спраночник по математике,— М. Наука, 1974.— 832 с. *Кресан В. З.* Сверхпроводимость и сверхтекучесть.— М. : Наука, 1978.— 190 с.

40. *Крылов А. Н.* Собрание сочинений.— М.; Л. : Изд-во АН СССР, 1936.— Т. 7. 697 с.

41. *Ламб Г.* Гидродинамика,— М.; Л. : Гостехиздат, 1947,— 928 с.

42. *Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М. : Физматгиз, 1959.— 532 с.

43. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.* М. Теория поля,— 5-е изд.— М. : Наука, 1967.— 460 с

44. *Ландау Л. Д.. Лифшиц Е. М.* Механика.— 3-е изд.— М. : Наука 1973,— 208 с.

45. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика.— М. : Наука, 1974.— 752 с.

46. *Линтон Э. А.* Сверхпроводимость,— М. : Мир, 1964.— 196 с.

47. *Линьков Р. В., Урман Ю.* /V. Вращающийся шар в магнитном поле.— Журн, техн. физики, 1973. 13. вып. 12, с. 2472—2480.

48.

49. *Линьков Р. В. Урман Ю. М.* Пондеромоторное взаимодействие вращающегося проводящего шара с переменным неоднородным магнитным полем.— Журн. техн. физики, 1974, 14, вып. 11, с. 2255—2264.
50. *Линьков Р. В., Урман Ю. М.* Силы и моменты, действующие иа проводящую оболочку, вращающуюся в магнитном поле — Журн. техн. физики, 1977, 17, вып. 5, с. 889—896.
51. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики.— М. : Физматгиз, 1960.— 618 с.
52. *Малеев П. И.* Новые типы гироскопов.— Л. . Судостроение, 1971.— 160 с.
53. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 530 с.
54. *Мартыненко Ю. Г.* Уходы электростатического гироскопа, вызываемые несферичностью ротора.— Из АН СССР. Механика твердого тела, 1970, № 1, с. 10—18.
55. *Меерович Э. А.* Методы релитивнстской электродинамики в электротехнике.— М.; Л. : Энергия, 1966.— 190 с.
56. *Менде Ф. Ф-, Трубицын А. В.* Перспективы использования сверхпроводимости в гравиметрии.— Физика конденснр. состояния, 1973, вып. 22, с. 72—79.
57. *Миткевич В. Ф.* Магнитный поток и его преобразования.— М.; Л.: Изд во АН СССР, 1946— 358 с.
58. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики.— М. : Изд-во иносф» лит., 1958,— Т. 2. 886 с.
59. *Новиков Л. З., Орлов О. Ф.* К теории электростатического подвеса.— Электричество, 1967, № 3, с. 63—68.
60. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— Прикл. математика и. механика, 1972, 36, вып. 2, с. 364—384.
61 *Дановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика.— М. : Физмат- гиз, 1963.— 432 с.
62. *Паркс Р. Д.* Квантовые эффекты в сверхпроводниках.— В кн.: Кнантовая макрофизика / Пер. с англ, под ред. В. Т. Хозяинова. М. : Наука, 1967, с. 1^8—1i36. (Над чем думают физики; Вып. 3).
63. *Пауэлл.* Крупномасштабные применения сверхпроводимости.— В кн.: Сверхпровод |щне маши» ы и устройства / Под ред. С. Фонера, Б. Шварца. М. :

Мир, 1977, с. 11—106.
64. *Пивень Л. З.* Устойчивость равновесия магнитного подвеса постоянного тока. — В кн.: Тр. Всесоюз. науч. конф. по электроприводам с линейн. двигателем (Киев, 1975 г.) :Тез. докл. Киев : Наук, думка, 1-.6, ч. 2, с. 122—1^7
65. *Резерфорд Э.* Избранные научные труды.— М. : Наука, 1972,— Т. 2. 532 с.
66. *Роуз-Инс А., Родерик Е.* Введение в физику сверхпроводимости.— М. : Мир,. 1972,— 272 с.
67. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вести. Моск, ун-та. Математика, 1957, № 4, с. 9—16.
68. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников,— М. : ВЦ АН СССР, 1967,— 141 с.
69. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений.— Прикл. математика и механика, 1968, 32, нып. 8, с. 504—508.
70. *Савицкий Е. М.* Сверхпроводящие материалы.— М. : Металлургия, 1976.— 295 с.
71. *Самойленко Ю. И.* Эффект отрицательной восприимчивости динамических систем и его применение для стабилизации неустойчивых объектов,— Изв. АН СССР. Автоматика н телемеханика, 1978, Nt 5, с. 11—21.
72. *Серин Б.* Сверхпроводимость : Эксперим. часть,— В кн.: Физика низких температур / Пер. с англ, под ред. А. И. Шальникова. М. : Изд-во иностр. лит.» 1959, с. 611-^78.
73. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика,— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.—604 с.
74. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма.— М.; Л.: Гостехнадат, 1948.— 539 с.
75. *Тамм И. Е.* Движение мезонов в электромагнитных полях.— Докл. АН СССР». 1940, 29, № 8/9, с. 551—554.

76. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М. : Наука 1966.— 624 с.
77. *Тамм И. Е.* Собрание научных Трудов.— М. : Наука, 1975.— Т. 2. 488 с.
78. *Тамм И. Е., Гинзбург В. Л.* К теории спина.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1947, 17, вып. 3, с. 227—237.
79. *Тамм И. Е., Силин В. П„ ФМнберг В. Я-* К релятивистской теории взаимодействия нуклонов,—Жури, эксперим. и теорет. физики, 1953, 23, вып. 3, с. 3—14.
80. *Торнтон Р.* Принципы проектирования систем магнитного подвешивания.— Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике : Пер. с англ.; 1973, № 5, с. 94—109.
81. *Уайт Д., Вудсон Г.* Электромеханическое преобразование энергии.— М.; Л. : Энергия, 1964.— 528 с.
82. *Урман Ю. М.* Уводящие моменты, вызываемые несферичностью ротора, в подвесе с аксиально-симметричным полем.— Изв. АН СССР. №> твердого тела, 1973, № 1, с. 24-31.
83. *Урман Ю. М., Танонова Е. П.* К расчету силовой функции двухкатушечного подвеса несферичного сверхпроводящего ротора.— Изв. вузов. Приборостроение, 1976, 19, № 9, с. 65—68.
84. *Фейнман Р.. Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике,— М. : Мир, 1977.— Т. 6. Электродинамика. 348 с.
85. *Френкель Я. И.* Избранные труды.— М. : Изд-во АН СССР, 1958.— Т. 2. 600 с.
86. *Хоукинс С.* Лабораторный сверхпроводящий соленоид диаметром 1,8 м для экранирования искусственных спутников,— В кн.: Сверхпроводящие соленоиды / Пер. с англ, под ред. Н. Е. Алексеевского.— М. : Мир, 195, с. 238— ЗЫ,
87. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения.— М. : Гостехиздат, 1946.— 207 с.
88. *Широков М. Ф.* Физические основы газодинамики. М. : Физматгиз, 1958.— 340 с.
86. *Braunbeck W.* Freischwebende Кбгрег im elektrischen und magnetischen Feld.— Z. Phys., 1939, 112, H. 7/8, S. 753—763.
<J6. *Braunbeck W.* Freies Schweben diamagnetischer Кбгрег im Мади feld.— Z.Pbys., 1939, 112, H. 9, S. 764-769.
01. *Daniels B.. Matthews P.* Superconducting bearing.— Rev. Scl. Instruments, 1966, 37, N 6, p. 75(4-753.
6S. *НеШ И. van der.* Stabilization by oscillation.— Philips Tech. Rev., 1974, 34,

N 2/3, p. 61—72.
Klein A. The Tamm — Dancoff formalism and the symmetric pseudoscalar theory of nuclear fopces.— Phys. Rev., 1953, 90; N 6, p. 1101—1115.
94. *Levy M. M.* Non-adlabatic treatment of the relativistic tuo- body problem.— Phys. Rev., 1962, 88, N I, p. 72-82.